

Zum räumlichen Tragverhalten mehrgeschossiger Gebäude in Holztafelbauart

von
Dipl.-Ing. Thorsten zur Kammer
aus Bergen

Bericht Nr. 06-1

aus dem Institut für Baukonstruktion und Holzbau
der Technischen Universität Carolo-Wilhelmina zu Braunschweig
Univ. Prof. Dr.-Ing. M. H. Kessel

Braunschweig 2006

Zum räumlichen Tragverhalten mehrgeschossiger Gebäude in Holztafelbauart

vom

FACHBEREICH BAUINGENIEURWESEN
DER TECHNISCHEN UNIVERSITÄT CAROLO-WILHELMINA
ZU BRAUNSCHWEIG

zur Erlangung des akademischen Grades eines Doktoringenieurs
(Dr.-Ing.)

genehmigte
DISSERTATION

von Herrn Dipl.-Ing. Thorsten zur Kammer
aus Bergen

Eingereicht am:	28. September 2005
Mündliche Prüfung am:	3. Februar 2006
Berichterstatter:	Univ. Prof. Dr.-Ing. Martin. H. Kessel, Braunschweig Univ. Prof. Dr.-Ing. Udo Peil, Braunschweig

Vorwort

Diese Arbeit entstand während und nach meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Baukonstruktion und Holzbau der Technischen Universität Braunschweig. Mein Doktorvater, Herr Prof. Dr.-Ing. Martin H. Kessel, hat ihr Entstehen über den gesamten Zeitraum begleitet und durch seine stets vorhandene Diskussionsbereitschaft wertvolle Anregungen gegeben. Ich danke ihm sehr für das entgegengebrachte Vertrauen und das große wissenschaftliche Interesse, durch das er mich immer wieder motivierte.

Mein Dank gilt ebenfalls dem Koreferenten, Herrn Prof. Dr.-Ing. Udo Peil, dem Vorsitzenden der Prüfungskommission, Herrn Prof. Dr.-Ing. Heinz Duddeck, und dem Prüfer, Herrn Prof. Dr.-Ing. Dietmar Hosser, für das konstruktive Interesse an meiner Arbeit und das Mitwirken in der Prüfungskommission.

Allen ehemaligen und aktuellen Mitarbeitern des Instituts danke ich für die gute und angenehme Zusammenarbeit. Besonders hervorgehoben seien Ute Sierig, Olaf Dettmann und André Mertinaschk, die mich schon während meiner Studienzeit vollwertig in das Institut integrierten, Marc Sandau-Wietfeldt, der stets zu produktiven Diskussionen und freundschaftlichen „Motivationsabenden“ bereit war, sowie Theo Schönhoff, der mit seinem, wie mir schien, unerschöpflichen Wissen jederzeit mit Rat und Tat zur Seite stand.

Die moralische Unterstützung und die Geduld meiner Eltern Ingrid und Wolfgang zur Kammer sowie meiner Freundin Eva waren mir eine unschätzbare Hilfe.

Thorsten zur Kammer

Bergen, im Februar 2006



Inhaltsverzeichnis

Vorwort.....	I
Inhaltsverzeichnis.....	III
Bezeichnungen	V
1 Einleitung und Motivation	1
2 Grundlagen zur Gebäudeaussteifung.....	6
2.1 Allgemeines	6
2.2 Berechnung von Aussteifungssystemen.....	7
3 Gebäudeaussteifung im Stahlbetonbau.....	11
3.1 Voraussetzungen und Definitionen für die technische Biegetheorie.....	11
3.2 Stab mit einfachem Rechteckquerschnitt	13
3.2.1 Biegebeanspruchung	13
3.2.2 Schubbeanspruchung.....	17
3.2.3 Torsionsbeanspruchung.....	19
3.3 Beliebiger Stabquerschnitt unter Biege- und Torsionsbeanspruchung.....	22
3.3.1 Biegebeanspruchung	22
3.3.2 Schubbeanspruchung.....	29
4 Gebäudeaussteifung im Holztafelbau	31
4.1 Konstruktion im Holztafelbau	31
4.2 Tragverhalten einer Wandtafel	33
4.3 Berechnungsverfahren zur Abschätzung der Verteilung der horizontalen Beanspruchungen auf die einzelnen Wandtafeln.....	39
5 Modellierung einer Wandtafel	42
5.1 FE-Modell einer Wandtafel.....	42
5.1.1 Diskretisierung der Rippen.....	42
5.1.2 Diskretisierung der Beplankung	43
5.1.3 Diskretisierung der Verbindungsmittel zwischen Beplankung und Rippen.....	44
5.1.4 Verifikation des FE-Modells	46
5.1.5 Berücksichtigung der Auflagersteifigkeiten	48
5.2 Vereinfachtes FE-Modell einer Wandtafel.....	54
6 Räumliche Anordnung der einfachen Wandtafel	59
6.1 Allgemeines	59
6.1.1 Konstruktion	59
6.1.2 FE-Modellierung.....	60
6.2 Wandtafeln ohne Verbindung in den Berührungskanten	64

6.3	Wandtafeln mit starrer Verbindung in den Berührungskanten.....	64
6.3.1	Wandtafeln in L-Stellung	64
6.3.2	Wandtafeln in U-Stellung	67
6.3.3	Wandtafeln in U+1-Stellung.....	68
6.4	Wandtafeln mit steifer Verbindung in den Berührungskanten	74
6.4.1	Wandtafeln in L-Stellung	74
6.4.2	Wandtafeln in U-Stellung	76
6.4.3	Wandtafeln in U+1-Stellung.....	78
6.5	Einfluss der Steifigkeit der Verbindung Wand-Decke.....	81
7	Analytische Beschreibung des Tragverhaltens von Wandtafeln mit Verbindung in den Berührungskanten	83
7.1	Allgemeines	83
7.2	Tragverhalten der einfachen Wandtafel unter Biegeverformung	84
7.3	Tragverhalten der L-Stellung.....	87
7.4	Tragverhalten der U-Stellung	91
7.5	Wandtafeln in beliebiger Grundrissanordnung unter Biegeverformung.....	92
7.6	Berücksichtigung der Biege- und Schubverformungen	97
8	Einfluss der vertikalen Einwirkungen	104
8.1	Allgemeines	104
8.2	Einzelne Wandtafel.....	104
8.3	U+1-Stellung ohne vertikale Verbindung der Wände.....	106
8.4	U+1-Stellung mit starrer vertikaler Verbindung der Wände.....	108
8.5	Analytische Beschreibung des Tragverhaltens.....	110
8.6	U+1-Stellung unter Berücksichtigung der Schubsteifigkeit der Wände.....	113
9	Anwendung auf den mehrgeschossigen Holztafelbau.....	114
9.1	Allgemeines	114
9.2	Schubsystem	115
9.3	Biegesystem.....	116
9.4	Schub- und Biegesystem	120
9.5	Bewertung der Untersuchungen.....	123
10	Zusammenfassung, Wertung und Ausblick	129
	Literaturverzeichnis.....	136

Bezeichnungen

Querschnittsdefinitionen

X, Y, Z	Globales, willkürlich gewähltes kartesisches Koordinatensystem des Gesamtsystems mit dem Ursprungspunkt O , Z -Koordinate verläuft parallel zur Stabachse, Querschnittsebene wird von X -, Y -Koordinaten gebildet
x_k, y_k, z_k	Lokales, willkürlich gewähltes kartesisches Koordinatensystem des Querschnitts k mit dem Ursprungspunkt O_k , z -Koordinate verläuft parallel zur Stabachse, Querschnittsebene wird von x -, y -Koordinaten gebildet
O	Ursprungspunkt (origin)
S	Schubmittelpunkt (shear centre)
C	Schwerpunkt (centre of gravity), Steifigkeit
c_{x_k}, c_{y_k}	Koordinatensystem im Schwerpunkt C_k des Querschnitts k , parallel zum x_k -, y_k -System
s^X, s^Y	Koordinatensystem im Schubmittelpunkt des Gesamtquerschnitts, parallel zum X -, Y -System
x_{ki}, y_{ki}	Koordinaten eines beliebigen Punktes i bezogen auf den Ursprungspunkt O_k im Teilsystem k
ϕ_k	Drehwinkel zwischen lokalem und globalem Koordinatensystem
k	Index für den Querschnitt
j	Index für den Teilquerschnitt
ξ_k, η_k	Hauptachsenkoordinatensystem des Querschnitts k
φ	Drehwinkel des willkürlichen Koordinatensystems zum Hauptachsensystem

Beanspruchungen

E	Einwirkung
$E(G)$	Ständige Einwirkungen
$E(Q)$	Veränderliche Einwirkungen
M_x	Biegemoment um die x -Achse
M_y	Biegemoment um die y -Achse, Fließmoment eines Verbindungsmittels
M_T	Torsionsmoment um die z -Achse
M_{ω}	Wölbmoment

N	Normalkraft
V_x	Querkraft in x-Richtung
V_y	Querkraft in y-Richtung
V_ω	Torsionsmoment um die z-Achse
σ	Normalspannung
σ_z	Normalspannung aus Biegung und Normalkraft
σ_ω	Wölbnormalspannungen
τ_{yz}	Schubspannung in der yz-Ebene
τ_ω	Wölbschubspannungen
T	Schubfluss
F_c	Auflagerdruckkraft
F_t	Auflagerzugkraft
F_V	Vertikale Auflagerkraft einer Wandtafel
F_H	Horizontale Auflagerkraft einer Wandtafel
F_F	Beanspruchung einer Feder im FE-Modell
F_{VM}	Beanspruchung eines Verbindungsmittels
ε	Dehnung
γ	Gleitung (Gleitwinkel)
$s_{v,0}$	Schubfluss zwischen Rippe und Beplankung, parallel zum Beplankungsrand
$s_{v,90}$	Schubfluss zwischen Rippe und Beplankung, senkrecht zum Beplankungsrand
R_d	Bemessungswert der Tragfähigkeit eines Verbindungsmittels
$R_{H,j}$	Horizontale Auflagerreaktion der Wandtafel j

Geometrische Größen

I_x	Flächenmoment 2. Grades (Flächenträgheitsmoment) um die x-Schwerpunktsachse
I_y	Flächenmoment 2. Grades (Flächenträgheitsmoment) um die y-Schwerpunktsachse
I_{xy}	Flächenzentrifugalmoment 2. Grades (Deviationsmoment)
S_x	Flächenmoment 1. Grades (Statisches Moment) um die x-Achse

I_{ω}	Flächenbimoment 2. Grades (Wölbwiderstandsmoment) um die z-Achse durch den Schubmittelpunkt
S_{ω}	Flächenbimoment 1. Grades (Statisches Wölbmoment) um die z-Achse
A	Querschnittsfläche
t	Dicke eines dünnwandigen Querschnitts, Dicke der Bepunktung
h_R	Querschnittshöhe einer Rippe
b_R	Querschnittsbreite einer Rippe
ℓ	Länge einer Wandtafel
d	Verbindungsmitteldurchmesser
a_v	Verbindungsmittelabstand
H	Höhe der Wandtafel, Höhe des Gebäudes, Länge des Kragträgers (in z-Richtung)
L	Länge eines Gebäudes
B	Breite eines Gebäudes
u, v, w	Verschiebungen in Richtung der Koordinaten x, y, z
v_v	Verformungen in Richtung der y-Achse infolge der Schubsteifigkeit
v_C	Verformungen in Richtung der y-Achse infolge der Auflagersteifigkeit
ϑ	Drehwinkel (um die z-Achse)
ψ	Drehwinkel (um die x-Achse)
φ	Drehwinkel (um die y-Achse)
${}^0\omega_i$	Einheitsverwölbung des Punktes i bezogen auf den Ursprungspunkt O
r	Abstand
ℓ_A	Abstand
$I_{C,x}$	Auflagerträgheitsmoment um die x-Schwerpunktsachse
$S_{C,x}$	Statisches Auflagermoment um die x-Achse
$I_{\omega,x}$	Auflagerwölbwiderstand um die z-Achse durch den Schubmittelpunkt
$I_{C,xy}$	Auflagerzentrifugalmoment

Steifigkeiten

E	Elastizitätsmodul
G	Schubmodul
μ	Querdehnzahl
C_i	Steifigkeit des Auflagers im Punkt i

C_j	Horizontale Steifigkeit der Wandtafel j
C_F	Steifigkeit der Federelemente zur Modellierung der Verbindungsmittel der Wandtafel
K_u	Verschiebungsmodul eines Verbindungsmittels in Grenzzustand der Tragfähigkeit
K_{ser}	Verschiebungsmodul eines Verbindungsmittels in Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit
K_c	Drucksteifigkeit eines Auflagers
K_t	Zugsteifigkeit eines Auflagers
K	Steifigkeit
C_{VV}	Steifigkeit der Federelemente zur Modellierung der vertikalen Verbindung der Wände
K_{VV}	Steifigkeit der vertikalen Verbindung der Wände

Matrizen und Vektoren

\overline{A}	Gesamtquerschnittswertematrix
\overline{A}_k	Querschnittswertematrix des Querschnitts k
\overline{A}_τ	Querschnittswertematrix der Flächenmomente 1. Grades
\overrightarrow{S}_τ	Vektor der Schubspannungserresultierenden Schnittgrößen
$\overrightarrow{S}_\sigma$	Vektor der Normalspannungserresultierenden Schnittgrößen
\overrightarrow{F}	Lastvektor
\overrightarrow{a}_i	Einheitsverschiebungsvektor des Punktes i
$\overline{\Psi}_k$	Transformationsmatrix für die Schwerpunktstransformation der Querschnittswerte des Querschnitts k
$\overline{\Phi}_k$	Transformationsmatrix für die Ausrichtung des lokalen Koordinatensystems des Querschnitts k auf das globale System
$\overline{\Lambda}_k$	Transformationsmatrix für den Bezug des lokalen Koordinatensystems des Querschnitts k auf das globale System
$\overline{\Gamma}_k$	Transformationsmatrix für Bezug und Ausrichtung des lokalen Koordinatensystems des Querschnitts k auf das globale System

$\overline{\Theta}$	Transformationsmatrix für die Schubmittelpunktstransformation der Querschnittswerte des Gesamtsystems
$\overline{\Xi}_k$	Transformationsmatrix des globalen Verschiebungsvektors auf die lokalen Bezugspunkte
\vec{K}	Formänderungsmatrix
\vec{U}	Verschiebungsfeld der Deckenscheibe
\vec{U}_j	Verschiebungsvektor der Wandtafel j
\overline{C}	Steifigkeitsmatrix
$\overline{A}_{c,k}$	Auflagerquerschnittswertematrix des Querschnitts k
\overline{C}_B	Steifigkeitsmatrix des Biegesystems
\overline{C}_S	Steifigkeitsmatrix des Schubsystems
D	Determinante

1 Einleitung und Motivation

Für den Bau von mehrgeschossigen Wohngebäuden und Hochhäusern wurde im Stahlbetonbau die Großtafelbauart entwickelt. Während sich im Stahlbetonbau bei Gebäuden mit wenigen Geschossen die Beanspruchungen der Bauteile im Wesentlichen aus dem Eigengewicht der Konstruktion und den vertikalen Verkehrslasten ergeben, beeinflussen bei vielgeschossigen Gebäuden und Hochhäusern auch die horizontalen Einwirkungen aus Wind, Beschleunigungskräfte aus Erdbeben und Abtriebskräfte aus Imperfektionen das Tragverhalten dieser durch ihre große Masse geprägten Bauwerke. Das eigentlich räumliche Tragwerk von hohen Gebäuden in Großtafelbauart, die durch Wand- und Deckenscheiben ausgesteift und durch horizontale Einwirkungen beansprucht sind, wird auf die Stabachse eines eingespannten Kragträgers reduziert, dessen teilweise offener und teilweise geschlossener Querschnitt dem Grundriss des Gebäudes entspricht und sich aus einzelnen, meist orthogonal angeordneten Wandscheiben zusammensetzt. Dieser Kragträger wird unter der Annahme eines elastischen, homogenen und isotropen Materials als ein auf Biegung und Torsion beanspruchter dünnwandiger Stab behandelt. In Bild 1-1 ist beispielhaft ein mehrgeschossiges Gebäude mit Grundriss dargestellt.

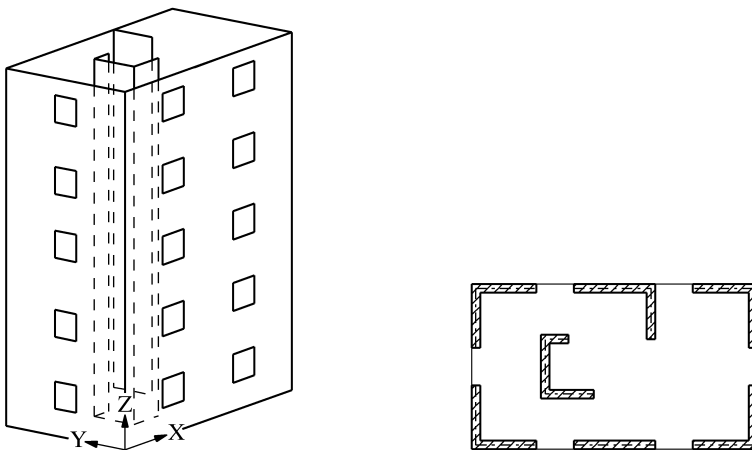


Bild 1-1: Mehrgeschossiges Gebäude und Grundriss des Gebäudes

Das Trag- und Verformungsverhalten von Gebäuden in Holztafelbauart entspricht jedoch für vertikale und horizontale Einwirkungen nicht dem eines solchen Stabes. Der Grund hierfür ist, dass

- für Gebäude in Holztafelbauart nur wenige Geschosse zulässig sind und damit deren Geometrie die Voraussetzungen der Stabtheorie a priori nicht erfüllt,
- trotz der wenigen zulässigen Geschosse die horizontalen Einwirkungen wegen der geringen Masse der Konstruktion einen signifikanten Einfluss auf das Tragverhalten haben und
- die Teile eines Tragwerks in Holztafelbauart nicht als starr verbunden angenommen werden können.

Zum Trag- und Verformungsverhalten, zur Wahl von statischen Modellen und zur Anwendung der FE-Methode im Holztafelbau liegt eine Vielzahl von Untersuchungen vor. Als Quintessenz der Arbeiten ergibt sich, dass das Tragverhalten von Holztafeln mit Hilfe der Schubfeldmethode in guter Näherung beschrieben werden kann. Auch die Nachweisverfahren der DIN 1052: 2004-08 beruhen auf diesem Verfahren. Die Verformungen von Holztafeln infolge ihrer Scheibenbeanspruchung setzen sich aus der Summe der Verformungen der Rippen (Normalkraftbeanspruchung), der Beplankung (Schubbeanspruchung), des Verbundes von Rippen und Beplankung (Beanspruchung der Verbindungsmittel auf Abscheren) und der Verbindungen mit den übrigen Teilen des Tragwerks (Querdruck-, Zug- oder Schubbeanspruchung) zusammen. Eine über die Schubfeldmethode hinausgehende Theorie zur Beschreibung des Tragverhaltens von Holztafeln und zur Bestimmung ihrer Tragfähigkeit und Steifigkeit liegt bis heute jedoch nicht vor.

Aufgrund der beschriebenen Unterschiede des Tragverhaltens der Gebäude im Holztafelbau im Vergleich zu denen im Stahlbetonbau entwickelten Cziesielski (1982) und später Steinmetz (1992), aufbauend insbesondere auf der Arbeit von v. Halász / Tantow (1966/2), vereinfachte Verfahren zur Verteilung der horizontalen Einwirkungen auf orthogonal angeordnete, einzelne Wandtafeln eines einzelnen Geschosses. Heinisuo (1986), Schmidt / Moody (1989) und Kessel (2002/2) zeigen, dass sich diese ingenieurmäßig hergeleiteten Verfahren mit Hilfe der Energiemethoden für beliebige Orientierungen der Wände verallgemeinern und auf 3 Freiheitsgrade reduzieren lassen. Ein wesentliches Merkmal dieser Verfahren ist, dass das räumliche Tragwerk eines Geschosses auf ein ebenes Modell reduziert wird. Das Gebäude wird bei Anwendung dieser Verfahren in einzelne unabhängige Geschosse zerlegt. Die ungestörten Bereiche der Wände eines Geschosses, die keine Tür- oder Fensteröffnungen besitzen, werden als einzelne Wandtafeln betrachtet. Die

einzelnen Wandtafeln sind horizontal über die als starr angenommene Deckentafel, auf die das horizontale Kräftesystem einwirkt, und vertikal indirekt über die als starr angenommenen Lagerungen der Wandtafeln miteinander verbunden. Die Verteilung der horizontalen Einwirkungen auf die einzelnen Wandtafeln wird in Abhängigkeit der Lage der Wände im Grundriss, ihrer Konstruktion, der Materialsteifigkeiten und ihrer Abmessungen ermittelt. Auf Grund der Reduzierung auf ein ebenes Modell werden diese Verfahren des Weiteren als 2D-Modelle bezeichnet.

Zumindest für mehrgeschossige Gebäude in Holztafelbauart erscheint die Annahme von starren Lagerungen und Verbindungen jedoch nicht zulässig. Der Grund hierfür liegt u. a. in der relativ geringen Querdruksteifigkeit des Holzes und der im Vergleich zur Längssteifigkeit des Holzes geringeren Steifigkeit von Zuganschlüssen. Darüber hinaus haben im Holztafelbau Kontaktanschlüsse eine große Bedeutung, die nur auf Druck Widerstand leisten. Dies hat zur Konsequenz, dass das zuvor beschriebene Rechenmodell dann keine ausreichend genauen Ergebnisse liefert,

- wenn der Einfluss vertikaler Einwirkungen auf die Verteilung der horizontalen Beanspruchungen der Wände berücksichtigt werden soll und
- wenn sich infolge der Anordnung der Wände im Grundriss Wandtafelgruppen, z. B. in L-, T- oder U-Form bilden können, deren einzelne Wände direkt miteinander verbunden sind.

Der Einfluss vertikaler Einwirkungen bei Berücksichtigung von nicht starren Verbindungen und Lagerungen auf das Tragverhalten eines Geschosses wurde erstmals von Kessel / Drücker (1996) und später von Kessel / Dettmann (2000/1, 2000/2) gezeigt. Zur Beschreibung des Tragwerks verwendeten sie ein räumliches Stabwerk, ein 3D-Modell, in dem sie für die einzelnen Holztafeln ebene Fachwerkmodelle benutzten und die Lagerungen entsprechend ihrer Steifigkeit simulierten. Das Verhalten der räumlichen Modelle war dabei hochgradig nichtlinear und konnte nicht mit Hilfe der oben beschriebenen 2D-Modelle abgebildet werden. Die vertikalen Einwirkungen und das Tragverhalten von Wandtafelgruppen in L-, T- und U-Form hatten bei diesen Untersuchungen einen großen Einfluss auf die horizontale Beanspruchung der einzelnen Wände.

Aufbauend auf der Arbeit von Kessel / Drücker (1996) berücksichtigt Andreasson (1999, 2000) die vertikalen Einwirkungen, um auf Zugverankerungen zu verzichten, und gibt hierzu einige Konstruktionsempfehlungen als Ergebnis von Parameterstudien an, ohne jedoch ein allgemein anwendbares, mechanisch begründetes Verfahren zu entwickeln.

Kessel / zur Kammer (2004, 2005) zeigen den Einfluss der vertikalen Einwirkungen auf die Verteilung der horizontalen Einwirkung bei Berücksichtigung der Steifigkeit des Zugaufagers an einem räumlichen Modell und stellen eine Erweiterung des 2D-Modells zur Berücksichtigung dieses Einflusses vor. Das vorgestellte Verfahren berücksichtigt nicht das Tragverhalten von Wandtafelgruppen, deren einzelne Wände direkt miteinander verbunden sind.

Die Analyse des Stands der Forschung zeigt, dass das Tragverhalten einzelner Holztafeln durch FE-Modelle sehr gut beschrieben und durch ingenieurmäßige Bestimmungsgleichungen eine gute Abschätzung der Tragfähigkeit und Steifigkeit angegeben werden kann. Über das Zusammenwirken der einzelnen Holztafeln eines mehrgeschossigen Gebäudes und das daraus resultierende räumliche Tragverhalten fehlen wissenschaftliche Untersuchungen. Die im Holztafelbau vorliegenden Berechnungsmodelle (2D-Modelle) für die Abschätzung des räumlichen Tragverhaltens erscheinen für die Anwendung auf den mehrgeschossigen Holztafelbau zu ungenau, um einen auf die Wirtschaftlichkeit und Sicherheit abgestimmten Ausnutzungsgrad des Gebäudes gewährleisten zu können.

Im Rahmen dieser Arbeit soll das räumliche Tragverhalten von Wandtafeln unter Berücksichtigung ihrer Lagersteifigkeiten und ihrer direkten Verbindung untereinander untersucht werden. Durch die Untersuchungen sollen die bestehenden analytischen Berechnungsmodelle aus dem Stahlbeton- und Holztafelbau weiterentwickelt und Empfehlungen für die Modellierung mehrgeschossiger Gebäude im Holztafelbau mit Hilfe von FE-Programmen gegeben werden.

Für die experimentelle Untersuchung des räumlichen Tragverhaltens von Gebäuden in Holztafelbauart stehen in Deutschland zurzeit keine Prüfeinrichtungen zur Verfügung. Dies gilt selbst für die Untersuchung von Wandtafelgruppen in L-, T- oder U-Form, da die bestehenden Prüfeinrichtungen nur für einzelne Wandtafeln ausgelegt sind, die in ihrer Ebene beansprucht werden. Daher kann im Rahmen dieser Arbeit nur eine theoretische Untersuchung des räumlichen Tragverhaltens durchgeführt werden.

Nach einer kurzen allgemeinen Einführung in die Grundlagen der Gebäudeaussteifung in Kap. 2, werden in Kap. 3 und 4 die Berechnungsmodelle für die Abschätzung der Gebäudeaussteifung im Stahlbeton- und Holztafelbau vorgestellt. In Kap. 5 wird das Tragverhalten der Holztafelbauwände näher betrachtet und aus dem genaueren FE-Modell

einer Wandtafel mit finiten Scheiben-, Stab- und Federelementen eine Ein-Element-Tafel entwickelt, welche das wesentliche Verformungsverhalten einer Wandtafel in guter Näherung abbildet und an der die bemessungsrelevanten Beanspruchungen leicht ablesbar sind. Mit Hilfe dieser Ein-Element-Tafel wird in Kap. 6 das räumliche Trag- und Verformungsverhalten von Wandtafelgruppen in L- und U-Stellung unter Berücksichtigung der Auflagersteifigkeiten und ihrer Verbindung untereinander untersucht. Es folgt die Erweiterung des FE-Modells der U-Stellung, so dass sich eine statisch unbestimmte U+1-Stellung ergibt. Das Trag- und Verformungsverhalten der untersuchten räumlichen Anordnungen wird in Kap. 7 mit Hilfe der in Kapitel 3 und 4 vorgestellten Verfahren analysiert. Die Biege- und Torsionstheorie für den Stab wird modifiziert, um die Auflagersteifigkeit der Wände und ihre Verbindung untereinander in der „Querschnittsermittlung“ berücksichtigen zu können. Es wird ein Verfahren zur Berechnung des eingeschossigen Aussteifungssystems angegeben, bei dem die Schubsteifigkeit der Wandtafeln und die Biegesteifigkeit aus den Auflagersteifigkeiten gleichzeitig berücksichtigt werden können. In Kap. 8 wird das Tragverhalten der räumlichen Anordnung der Wandtafeln infolge von vertikalen Einwirkungen untersucht und mit Hilfe des in Kap. 7 entwickelten Verfahrens analysiert. Kap. 9 zeigt das Tragverhalten eines zweigeschossigen Aussteifungssystems am FE-Modell. Die Anwendbarkeit des entwickelten Verfahrens und die vereinfachenden Annahmen in der Norm werden überprüft. Kap. 10 gibt zusammenfassende Hinweise im Hinblick auf die Modellierung und Berechnung mehrgeschossiger Gebäude in Holztafelbauart.

2 Grundlagen zur Gebäudeaussteifung

2.1 Allgemeines

Im Stahlbetonbau wie auch im Holztafelbau besteht die Konstruktion eines Gebäudes in der Regel aus horizontalen Decken und Balken sowie vertikal orientierten Wänden und Stützen. Unter horizontalen Einwirkungen bilden die horizontalen und vertikalen Bauteile zusammen ein räumliches Tragwerk, das des Weiteren als Aussteifungssystem bezeichnet wird. In Abhängigkeit der Steifigkeit der einzelnen Bauteile und deren Verbindung untereinander bilden sich unterschiedliche Aussteifungssysteme aus. Grundsätzlich ist zwischen zwei Systemen zu unterscheiden:

- Horizontale Einwirkungen werden alleine über die vertikalen Wände in den Baugrund abgetragen, da deren Scheibensteifigkeit sehr viel größer ist als die Plattensteifigkeit der horizontalen Decken.
- Horizontale Einwirkungen werden von Rahmen abgetragen, die sich aus horizontalen Balken und vertikalen Stützen zusammensetzen. Dabei haben horizontale und vertikale Bauteile eine vergleichbare Steifigkeit.

Aussteifungssysteme im Holztafelbau entsprechen auf Grund der Konstruktion der einzelnen Tafeln der ersten Variante. Hierauf wird in Kap. 4 und 5 näher eingegangen. Im Stahlbetonbau sind grundsätzlich beide Möglichkeiten sowie eine Kombination aus beiden denkbar. Allerdings spielen bei einer gemischten Verwendung von Wänden und Stützen die Steifigkeit der Stützen und die Plattensteifigkeit der Wände keine wesentliche Rolle gegenüber der Scheibensteifigkeit der Wände. Im Rahmen dieser Arbeit werden nur Aussteifungssysteme betrachtet, die sich aus Decken und Wänden zusammensetzen. Die Steifigkeit von Stützen wird nicht berücksichtigt. Aufgrund dieser Überlegungen ergibt sich für die Berechnung eines Aussteifungssystems ein Tragwerksmodell mit folgenden Eigenschaften:

- Wände leisten nur bei scheibenartiger Beanspruchung Widerstand.
- Für die Berechnung werden nur ungestörte Wandbereiche ohne Öffnungen berücksichtigt.
- Die Scheibensteifigkeit der Decke wird als starr angenommen.
- Wände und Decken haben keine Plattensteifigkeit.
- Wände und Decken sind schubfest miteinander verbunden.
- Der Grundriss ist in allen Geschossen gleich.
- Die Wände sind untereinander in vertikaler Richtung verdübelt und am Fußpunkt an eine als starr angenommene Sohlplatte angeschlossen.

Diese Annahmen gelten für den Bereich des Stahlbetonbaus wie auch für den Holztafelbau.

2.2 Berechnung von Aussteifungssystemen

Ein Gebäude gilt als ausgesteift, wenn mindestens drei Wandscheiben vorhanden sind, deren Wandquerschnittsmittellinien sich im Grundriss nicht in einem Punkt schneiden und die nicht alle parallel stehen. Sind, wie in Bild 2-1, nur drei Wandscheiben vorhanden, liegt eine statisch bestimmte Gebäudeaussteifung vor und die Beanspruchungen der einzelnen Wände können über die Gleichgewichtsbedingungen ermittelt werden. Die eigentlich flächig auf das Gebäude angreifenden horizontalen Einwirkungen sind in Bild 2-1 zu horizontalen Resultierenden F_X und F_Y , die auf die Deckenscheibe wirken, zusammengefasst.

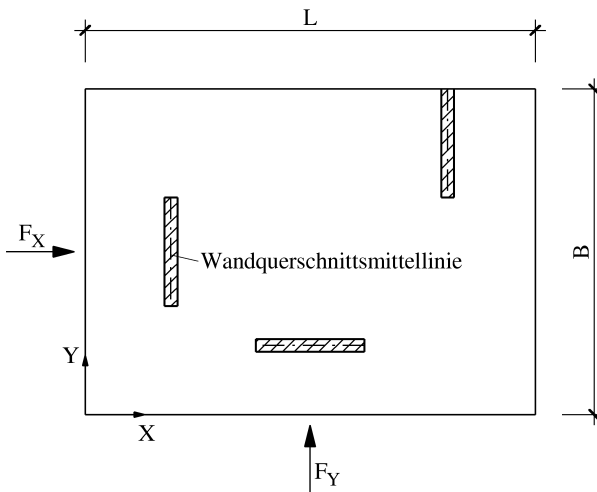


Bild 2-1: Statisch bestimmter Gebäudequerschnitt mit horizontalen Einwirkungen

Sind mehr als drei Wandscheiben vorhanden, können die Beanspruchungen nicht mehr über die Gleichgewichtsbedingungen ermittelt werden. Die Beanspruchung der einzelnen Wandscheibe ist abhängig von ihrer Position und ihrer Steifigkeit im Gesamtsystem. Wie auch in Bild 2-2 und Bild 2-4 zu erkennen, unterscheiden sich das Tragverhalten einer Wand aus Stahlbeton und einer Wandtafel im Holztafelbau elementar. Während sich das Tragverhalten einer Stahlbetonwand, die grundsätzlich als starr verbunden mit der Unterkonstruktion gelten kann, durch das Modell eines Biegebalkens beschrieben werden kann, dessen Schubverformungen vernachlässigbar sind, verhält sich eine Wand in

Holztafelbauart, die mit der Unterkonstruktion starr verbunden ist, mechanisch wie ein Schubfeld, dessen Biegeverformungen vernachlässigt werden können.

In Bild 2-2 ist das in Kap. 2.1 beschriebene Tragwerksmodell für eine reine Biegebeanspruchung dargestellt. Das Tragwerk verhält sich wie ein in die Sohlplatte eingespannter Kragträger. Der Gesamtquerschnitt des Kragträgers entspricht dem Grundriss des Gebäudes und setzt sich aus den einzelnen Wandquerschnitten zusammen, die über die Deckenscheibe so miteinander gekoppelt sind, dass ihre relative Lage zueinander erhalten bleibt und sie sich parallel verformen. Der symbolisch gelenkige Anschluss der Deckenscheibe an die Wände drückt aus, dass die Plattensteifigkeit der Decke nicht berücksichtigt wird. Für die einzelnen Querschnitte gilt, dass sie auch bei der Verformung eben bleiben und senkrecht zu ihrer Stabachse stehen. Die Verformungen im Stahlbetonbau ergeben sich maßgeblich infolge von Biegeverformungen. Daher wird im Stahlbetonbau das eigentlich räumliche Tragwerk von hohen Gebäuden in Großtafelbauart auf die Stabachse eines eingespannten Kragträgers reduziert, dessen teilweise offener und teilweise geschlossener Querschnitt sich aus einzelnen, meist orthogonal angeordneten Wandscheiben zusammensetzt. Dieser Kragträger wird unter der Annahme eines elastischen, homogenen und isotropen Materials als ein auf Biegung und Torsion beanspruchter dünnwandiger Stab behandelt.

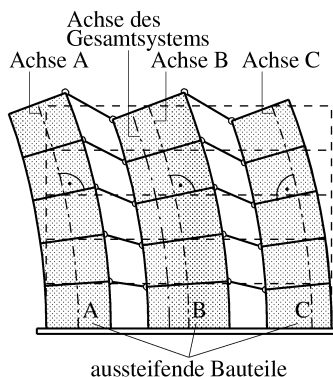
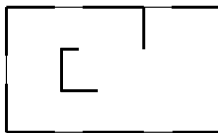


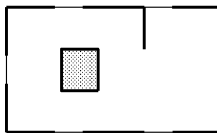
Bild 2-2: Infolge einer Biegebeanspruchung verformtes Tragwerksmodell, s. auch Haße (2004)

Eine Torsionsbeanspruchung des Kragträgers tritt vorrangig infolge von horizontalen Einwirkungen auf, die nicht im Schubmittelpunkt des Gesamtquerschnitts angreifen. Die

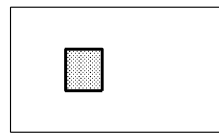
Torsionsbeanspruchung setzt sich dabei zusammen aus der St. Venantschen Torsion und der Wölbkrafttorsion. Die Größe des jeweiligen Anteils ist abhängig vom Querschnitt des Kragträgers. Es sind grundsätzlich drei Querschnittstypen zu unterscheiden, die in Bild 2-3 dargestellt sind. Setzt sich der Gesamtquerschnitt wie in Bild 2-3a aus drillweichen, offenen Querschnitten zusammen, dominiert die Wölbkrafttorsion. Ist, wie in Bild 2-3b, ein drillsteifer geschlossener Querschnitt im Gesamtquerschnitt vorhanden treten beide Torsionsarten auf. Sind nur drillsteife, geschlossene Querschnitte vorhanden dominiert die St. Venantsche Torsion. Während im Stahlbetonbau Fahrstuhl- oder Versorgungsschächte oftmals so konstruiert werden, dass sie für die Berechnung als geschlossener Querschnitt angesehen werden können, werden im Holztafelbau, wie in Kap. 4.1 noch näher beschrieben wird, Wandabschnitte mit Öffnungen für die Berechnung des Aussteifungssystems vernachlässigt. Daher werden des Weiteren nur Gesamtquerschnitte betrachtet, die sich, wie in Bild 2-3a, aus drillweichen, offenen Querschnitten zusammensetzen.



a) drillweiche, offene Querschnitte



b) drillweiche, offene und drillsteife, geschlossene Querschnitte



c) drillsteifer, geschlossener Querschnitt

Bild 2-3: Gesamtquerschnittstypen

In Bild 2-4 ist das Tragwerksmodell unter einer reinen Schubbeanspruchung dargestellt. Die Querschnitte bleiben bei der Verformung nicht senkrecht zu ihrer Stabachse. Damit sind die Voraussetzungen für die Anwendung der Stabtheorie nicht mehr gegeben. Ein solches Tragwerk, bei dem die maßgeblichen Verformungen infolge von Schubverformungen auftreten, wie es im Holztafelbau der Fall ist, kann somit nicht mit Hilfe der Methoden aus dem Stahlbetonbau berechnet werden.

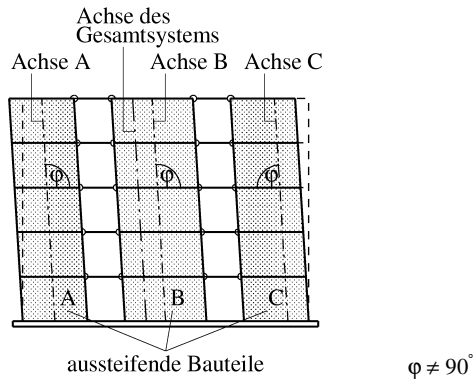


Bild 2-4: Infolge einer Schubbeanspruchung verformtes Tragwerksmodell

3 Gebäudeaussteifung im Stahlbetonbau

Das räumliche Tragverhalten von Gebäuden im Stahlbetonbau wurde u. a. von Stiller (1961, 1965), Beck (1961, 1969), von Halász / Tantow (1966/1, 1966/2), Rosman (1967), Schäfer (1969) und Brandt (1976) untersucht. Wie bereits in Kap. 2 beschrieben, kann als Quintessenz der Arbeiten gesehen werden, dass im Stahlbetonbau die eigentlich räumliche Tragstruktur auf die Stabachse eines eingespannten Kragträgers reduziert wird, dessen teilweise offener und teilweise geschlossener Querschnitt sich aus einzelnen, meist orthogonal angeordneten Wandscheiben zusammensetzt. Dieser Kragträger wird unter der Annahme eines elastischen, homogenen und isotropen Materials als ein auf Biegung und Torsion beanspruchter dünnwandiger Stab behandelt. Zu diesem Thema der Stabtheorie liegen eine Vielzahl von Veröffentlichungen, wie z. B. von Bornscheuer (1952), Chwalla (1954), Wlassow (1965) und Roik / Carl / Lindner (1972) vor. Da im Rahmen dieser Arbeit das räumliche Tragverhalten von Wandtafel unter Berücksichtigung ihrer Lagersteifigkeiten und direkten Verbindung untereinander mit Hilfe der Stabtheorie analysiert werden soll, wird in diesem Kapitel eine kurze Einführung in die Stabtheorie und damit verbunden in die Rechenverfahren des Stahlbetonbaus gegeben. Es wird zunächst auf Grundlage von Schnell / Gross / Hauger (1992), Friemann (1993), Mehlhorn (1999) und Haße (2004) eine einzelne Wand und damit ein Stab mit einfachem Rechteckquerschnitt betrachtet, um anschließend ein Verfahren von Haße (2004) zur Berechnung von beliebig zusammengesetzten Querschnitten anzugeben.

3.1 Voraussetzungen und Definitionen für die technische Biegetheorie

Ein Stab wird repräsentiert durch Querschnitt und Stabachse. Wie bereits in Kap. 2 beschrieben, wird der Grundriss eines Gebäudes als ein Gesamtquerschnitt zusammengefasst und das Gebäude als ein eingespannter Stab berechnet. Damit wird vorausgesetzt, dass die Höhe H des Gebäudes, also die Länge des Stabes, groß gegenüber seinen Querschnittsabmessungen ist. Die Stabachse ist gerade und verläuft in z -Richtung eines kartesischen Koordinatensystems. Die Querschnittsachsen verlaufen somit in x - und y -Richtung. Der Grundriss wird für die Berechnung des Aussteifungssystems als ein dünnwandiger Querschnitt angesehen. Damit ist es für die Berechnungen ausreichend, wie in Bild 3-1 nur noch die Querschnittsmittellinien der Wände zu betrachten. Der Gesamtquerschnitt in Bild 3-1 setzt sich zusammen aus k Querschnitten, die sich wiederum aus j Teilquerschnitten zusammensetzen können. Für die Berechnung wird für den Gesamtquerschnitt ein willkürliches kartesisches (globales) X -, Y - Koordinatensystem mit dem Ursprungspunkt O eingeführt. Jeder Querschnitt k erhält ein willkürliches kartesisches (lokales) x_k -, y_k - Koordinatensystem mit dem Ursprungspunkt O_k .

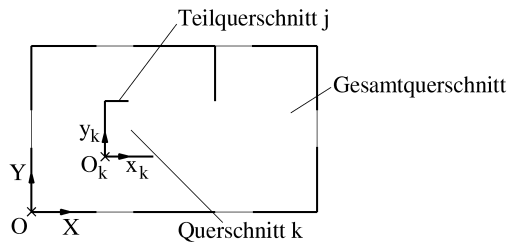


Bild 3-1 : Koordinatendefinition am Gesamtquerschnitt

Bild 3-2 zeigt einen Querschnitt k des Gesamtquerschnitts bzw. Grundrisses eines Gebäudes. Der Querschnitt setzt sich aus $j = 3$ Teilquerschnitten bzw. Wänden zusammen. Die wichtigsten Querschnittspunkte sind wie folgt definiert:

- O_k Ursprungspunkt eines beliebig wählbaren kartesischen Koordinatensystems. Die Querschnittsachsen werden mit x_k und y_k bezeichnet. Im Rahmen dieser Arbeit liegt das Ursprungkoordinatensystem immer auf der Querschnittsmittellinie und in der linken unteren Ecke des Querschnitts.
- C Ursprung der Schwer- und Hauptachsen. Die Schwerachse verläuft parallel zur Stabachse und erfährt bei einer Biegebeanspruchung des Querschnitts keine Dehnungen und infolge achsialer Längslast keine Krümmungen. Die Querschnittsachsen werden mit c_{x_k} und c_{y_k} bezeichnet, wenn sie parallel zum beliebig gewählten Koordinatensystem im Punkt O_k verlaufen. Die Querschnittsachsen sind Hauptachsen und werden mit ξ_k und η_k bezeichnet, wenn Biegung um die eine Hauptachse keine Krümmung um die andere Hauptachse erzeugt. Die Hauptachsen sind um den Winkel φ gegenüber dem beliebig gewählten Koordinatensystem verdreht. C wird des Weiteren als Schwerpunkt bezeichnet.
- S Spurpunkt der Schubmittelpunktsachse. Die Faser der Schubmittelpunktsachse verwindet sich unter der Einwirkung eines Torsionsmomentes nicht. Auf die Schubmittelpunktsachse gerichtete Querlasten erzeugen keine Torsionsbeanspruchungen. S wird des Weiteren als Schubmittelpunkt bezeichnet.

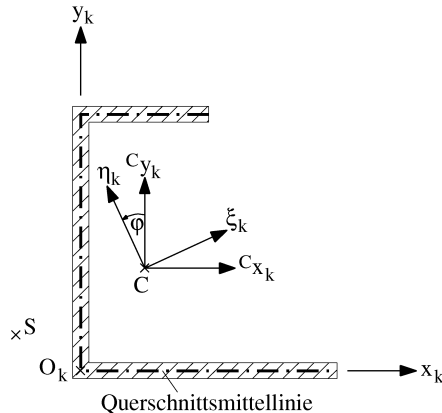


Bild 3-2 : Achsdefinition am dünnwandigen Querschnitt

Für die Anwendung der technischen Biegetheorie werden folgende Voraussetzungen bzw. Einschränkungen angenommen:

- (1) Die Querschnittsabmessungen des Stabes sind sehr viel kleiner als seine Länge. Der Stab ist prismatisch. Die Stabachse ist gerade.
- (2) Das Hookesche Gesetz ist uneingeschränkt gültig.
- (3) Sämtliche Formänderungen sollen klein gegenüber den Querschnittsabmessungen bleiben.
- (4) Die Querschnittsform bleibt bei der Verformung des Stabes erhalten.
- (5) Für die Biegebeanspruchung eines Stabes gelten die Hypothesen von Jacob Bernoulli:
 1. Der Querschnitt bleibt eben.
 2. Die vor der Biegedeformation zur Stabachse senkrechten Querschnittsebenen sollen auch nach der Deformation senkrecht zur Stabachse sein.

3.2 Stab mit einfachem Rechteckquerschnitt

3.2.1 Biegebeanspruchung

Die in Bild 3-3 dargestellte einfache Wand als Kragträger mit einem dünnwandigen, rechteckigen, konstanten Querschnitt erfüllt die Voraussetzungen für die Anwendung der Biegetheorie nach Kap. 3.1 und wird mit einer Einzellast F_y am Kragarmende belastet. Da für diesen einfachen Querschnitt die Lage des Schwerpunktes und die Richtung der Hauptachsen bekannt sind, wird hier das Ursprungssystem in den Schwerpunkt und in Richtung der Hauptachsen gelegt. In diesem einfachen Fall wird mit dem x -, y -Koordinatensystem anstatt

mit dem nach Definition in Kap. 3.1 korrekten ξ -, η -Koordinatensystem gearbeitet. Die Betrachtung des Kragträgers mit beliebigem Querschnitt folgt in Kap. 3.3.

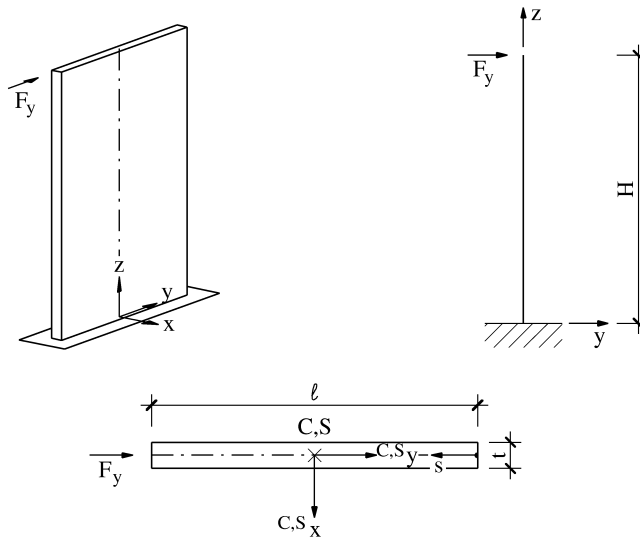


Bild 3-3 : Kragträger mit einfachem Rechteckquerschnitt

Da nur Beanspruchungen in der y - z -Ebene vorhanden sind, wird der Träger vereinfachend als ein zweidimensionales Problem behandelt.

Aus der Voraussetzung (4) in Kap. 3.1 vom Erhaltenbleiben der Querschnittsform bei der Verformung des Stabes, ergibt sich, wie in Bild 3-4 zu erkennen, dass alle Punkte eines Querschnitts die gleiche Verschiebung $v(z)$ in y -Richtung erfahren.

Aus der Voraussetzung (5) vom Ebenbleiben des Querschnitts, folgt, dass der Querschnitt neben der Verschiebung v eine Drehung um einen kleinen Winkel $\psi = \psi(z)$ erfährt. Wie aus Bild 3-4 ersichtlich, ergibt sich daher für einen Punkt P des Querschnitts im beliebigem Abstand c_y von der Stabachse die Verschiebung w in Richtung der Stabachse zu

$$w(y, z) = \psi(z) \cdot c_y \quad \text{für } |\psi| \ll 1. \quad (3.1)$$

Aus den Verzerrungs-Verschiebungsbeziehungen an einem homogenen, isotropen und elastischen Körper ergeben sich die Dehnung ε als Verhältnis von Längenänderung zu Ausgangslänge zu

$$\varepsilon_z(y, z) = \frac{\partial w(y, z)}{\partial z} = \psi'(z) \cdot c_y \quad (3.2)$$

und die Gleitung γ als Winkeländerung eines Körpers

$$\gamma_{yz}(y, z) = \frac{\partial v(z)}{\partial z} + \frac{\partial w(y, z)}{\partial y} = v'(z) + \psi(z). \quad (3.3)$$

Mit Hilfe der Gleichungen des Hookeschen Gesetzes ergibt sich der lineare Verlauf der Normalspannungsverteilung infolge einer Biegebeanspruchung

$$\sigma_z(y, z) = E \cdot \psi'(z) \cdot c_y. \quad (3.4)$$

Aus der Voraussetzung (5), dass die Querschnittsebene auch nach der Biegedeformation senkrecht zur Stabachse stehen soll, folgt, dass die Schubverzerrungen vernachlässigt werden.

Es gilt $\gamma_{yz} = 0$ und damit aus Gl. (3.3)

$$v' = -\psi. \quad (3.5)$$

Durch Differenziation resultiert aus den Gln. (3.4) und (3.5)

$$v'' = -\frac{\sigma_z(y, z)}{E \cdot c_y}. \quad (3.6)$$

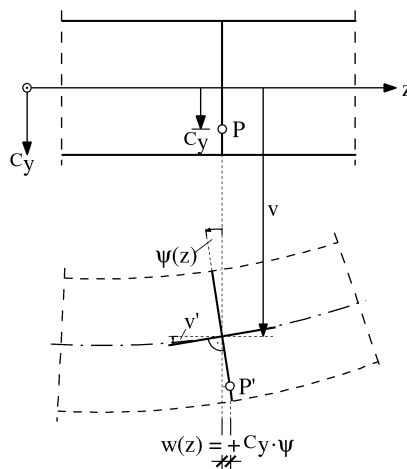


Bild 3-4 : Querschnittsverchiebungen infolge einer Biegebeanspruchung

Aus den Schub- und Normalspannungsverteilungen ergeben sich durch Integration über die Fläche die Schnittgrößen

$$M_x = \int_A \sigma_z \cdot y \, dA, \quad (3.7)$$

$$V_y = \int_A \tau_{zy} \, dA. \quad (3.8)$$

Einsetzen von Gl. (3.4) in Gl. (3.7) ergibt

$$M_x = E \cdot \psi' \int_A y^2 \, dA. \quad (3.9)$$

Mit Einführung von

$$I_x = \int_A y^2 \, dA \quad (3.10)$$

als Flächenmoment 2. Grades bezogen auf die Hauptachse x des Querschnitts folgt mit

$$v'' = - \frac{M_x}{E \cdot I_x} \quad (3.11)$$

die bekannte Form der Differenzialgleichung der Biegelinie. Wobei v'' bei den hier angenommenen kleinen Verformungen als Krümmung bezeichnet wird. Aus Gl. (3.11) können durch Integration die Neigung $v'(x)$ und die Verschiebungen $v(x)$ bestimmt werden.

Für das hier zu betrachtende statische Modell eines eingespannten Kragträgers unter der Einwirkung F_y nach Bild 3-3 ergibt sich das Moment M_x aus den Gleichgewichtsbedingungen zu

$$M_x(z) = -F_y \cdot (-z + H) \quad (3.12)$$

und somit unter Berücksichtigung der geometrischen Randbedingungen an der Einspannstelle die Verschiebungsfunktion

$$v(z) = \frac{F_y \cdot H^3}{6 \cdot E \cdot I_x} \left(-\frac{z^3}{H^3} + 3\frac{z^2}{H^2} \right). \quad (3.13)$$

Aus den Gln. (3.4), (3.9) und (3.10) folgt der bekannte direkte Zusammenhang zwischen Spannung und Biegemoment mit

$$\sigma_z(y) = \frac{M_x}{I_x} \cdot y. \quad (3.14)$$

3.2.2 Schubbeanspruchung

Aus der Gleichgewichtsbetrachtung in Bild 3-5 ergeben sich die Schubspannungen im Querschnitt. Wenn keine randparallelen äußeren Einwirkungen vorhanden sind, müssen die Schubspannungen τ_{yz} an den Querschnittsrändern gleich Null sein. Für den Querschnittsabschnitt mit der Fläche A_τ in z-Richtung ergibt sich

$$dz \cdot \int_{A_\tau} \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dA = dz \cdot \int \tau_{yz} dt. \quad (3.15)$$

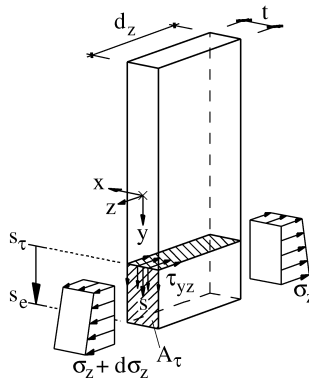


Bild 3-5: Gleichgewicht an einem Querschnittsabschnitt

Zur Definition der Fläche A_τ wird eine Laufvariable $+s$ eingeführt, die ihren Ursprung, wie in Bild 3-5 zu erkennen, an der Schnittstelle s_τ hat und zum Querschnittsende s_e läuft. Die Schubspannung wird als positiv definiert, wenn sie in Richtung von $+s$ verläuft. Für dünnwandige Querschnitte kann in guter Näherung angenommen werden, dass die Schubspannungen τ_{zs} über die Breite t konstant verteilt sind und in Richtung der Querschnittsmittellinie verlaufen. Schubspannungen senkrecht zur Querschnittsmittellinie werden vernachlässigt. Mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen am differentiellen Element und Gl. (3.14) folgt

$$\tau_{zs}(z, s) = \frac{V_y(z) \cdot S_x(s)}{I_x \cdot t}, \quad (3.16)$$

wobei $S_x(s)$ das statische Moment des Querschnittsabschnitts bezüglich der Hauptachse x ist. Es resultiert aus

$$S_x(s) = \int_{A_\tau} y(s) dA. \quad (3.17)$$

Die Schubbeanspruchung wird bei dünnwandigen Querschnitten über den Schubfluss $T(s)$ ausgedrückt, der sich ergibt aus

$$T(s) = \tau_{zs}(s) \cdot t(s). \quad (3.18)$$

Die Resultierende R_y lässt sich aus der Integration des Schubflusses ermitteln,

$$R_y = \int_A T(s) ds. \quad (3.19)$$

Die Verformungen infolge der Schubbeanspruchung werden nach den Voraussetzungen zur Anwendung der Biegetheorie vernachlässigt. Diese Vernachlässigung ist gerechtfertigt, da die auftretenden Verformungen bei den vorausgesetzten Materialeigenschaften und den geometrischen Randbedingungen sehr viel geringer sind als die Verformungen infolge der Biegebeanspruchung. Da bei den anstehenden Untersuchungen im Holztafelbau die Schubverformungen nicht mehr zu vernachlässigen sind, werden auch für den hier betrachteten Stab Gleichungen zur Abschätzung der Schubverformung angegeben.

Die sich für den betrachteten einfachen Rechteckquerschnitt aus Gl. (3.16) ergebende Schubspannungsverteilung hat einen parabelförmigen Verlauf. Damit ist klar, dass auch die Schubverzerrungen nicht über die Querschnittshöhe konstant sind, sondern es zu veränderlichen Verwölbungen über die Höhe H des Querschnitts kommt. Die damit auftretenden Faserdehnungen und Normalspannungen sind gegenüber den Normalspannungen infolge der Biegebeanspruchung aber vernachlässigbar klein. Die Schubverformungen werden daher mit Hilfe eines mittleren Gleitungswinkels γ_M ermittelt. Damit bleibt der Querschnitt auch nach der Verformung eben, allerdings nicht mehr senkrecht zu seiner Stabachse. Der mittlere Gleitwinkel folgt aus

$$\gamma_{zM}(z) = \frac{1}{G \cdot V_y} \cdot \int \tau_{zs}^2 dA \quad (3.20)$$

oder für den vorliegenden Querschnitt mit parabelförmiger Schubspannungsverteilung aus

$$\gamma_{zM}(z) = 1,2 \cdot \frac{V_y(z)}{G \cdot A}. \quad (3.21)$$

Die Verformungen v_v des Stabes infolge der Schubbeanspruchung ergeben sich aus

$$v_v(z) = \int \gamma_{zM}(z) dz. \quad (3.22)$$

Die Querkraft V_y ist hier konstant und ist gleich der äußeren Einwirkung,

$$V_y = F_y. \quad (3.23)$$

Die Verformungen resultieren somit aus

$$v_v(z) = 1,2 \cdot \frac{F_y \cdot z}{G \cdot A}. \quad (3.24)$$

3.2.3 Torsionsbeanspruchung

Wie in Kap. 2.2 beschrieben, tritt eine Torsionsbeanspruchung des Kragträgers vorrangig infolge von horizontalen Einwirkungen auf, die nicht im Schubmittelpunkt des Gesamtquerschnitts angreifen. Somit ergibt sich das Torsionsmoment M_T aus

$$M_T = F_Y \cdot {}^S X_F - F_X \cdot {}^S Y_F . \quad (3.25)$$

Das Torsionsmoment $M_T = M_z$ wird zum Teil über die St. Venantsche Torsion $M_{T\tau}$ und zum Teil über die Wölbkrafttorsion $M_{T\omega}$ abgetragen:

$$M_T = M_{T\tau} + M_{T\omega} . \quad (3.26)$$

Die Größe des jeweilige Anteils ist abhängig von der St. Venantschen Torsionssteifigkeit $T = G \cdot I_T$ und der Wölbsteifigkeit $W = E \cdot I_\omega$ des Gesamtquerschnitts. Wie in Kap. 2.2 beschrieben, werden hier nur drillweiche, offene Querschnitte betrachtet, so dass der Anteil der Wölbkrafttorsion überwiegt und der Anteil der St. Venantschen Torsion vernachlässigt werden kann.

Für die Berechnung eines Stabes unter Torsionsbeanspruchung mit Hilfe der Torsionstheorie werden die Voraussetzungen (1) – (4) aus Kap. 3.1 übernommen. Die Bernoulli-Hypothese ist hier nicht gültig.

Infolge der Torsionsbeanspruchung des Stabes kommt es zu einer Verdrehung ϑ und Verdrillung ϑ' . Liegt keine erzwungene Drillachse vor, verdreht sich der Querschnitt um seine natürliche Drillachse, der Schubmittelpunktsachse. Durch die Verdrillung kommt es neben den Verschiebungen in Querschnittsebene u_T und v_T zu Verschiebungen w_T in Richtung der Stabachse. Diese Verschiebungen ergeben sich aus den Verwölbungen ω . Wie in Bild 3-6 zu erkennen, wird bei dünnwandigen Querschnitten vergleichbar der Bernoulli-Hypothese unterstellt, dass die einzelnen Teilquerschnitte bei der Verdrillung um die Drillachse durch den Schubmittelpunkt S eben und senkrecht zu ihren Längsfasern bleiben. Damit lassen sich die Verwölbungen direkt mit Hilfe des Kippwinkels β des Teilquerschnitts infolge der Verdrillung ϑ' berechnen. Der Kippwinkel vergrößert sich mit wachsendem Abstand r des Teilquerschnitts von der Drillachse. Der Abstand r wird immer senkrecht zur Teilquerschnittslänge Δs angetragen. Der Verwölbungszuwachs $\Delta\omega$ resultiert damit aus

$$\Delta\omega = r \cdot \Delta s . \quad (3.27)$$

Ist zwischen den aufeinander folgenden Punkten „i - 1“ und „i“ ein gerader Wandabschnitt vorhanden, was hier immer vorausgesetzt wird, ergibt sich

$$\Delta\omega_{i-1,i} = x_{i-1} \cdot y_i - x_i \cdot y_{i-1} . \quad (3.28)$$

Damit ist die Verwölbung des Punktes „i“ mit Hilfe der Verwölbung des Punktes „i – 1“ zu ermitteln

$$\omega_i = \omega_{i-1} + x_{i-1} \cdot y_i - x_i \cdot y_{i-1}. \quad (3.29)$$

Zur Ermittlung der Verwölbung bei beliebigen Querschnitten siehe Kap. 3.3.

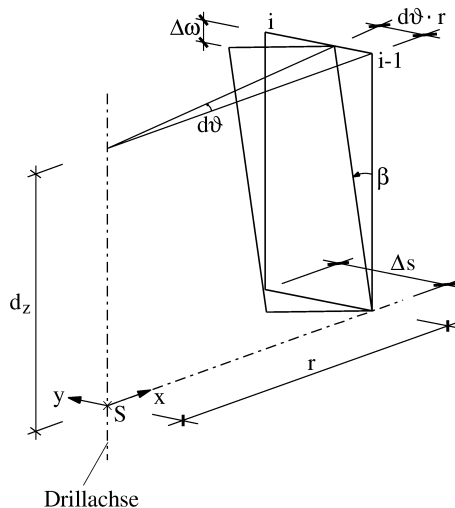


Bild 3-6 : Verwölbung eines dünnwandigen Querschnitts

Aufgrund der Einspannung des Stabes in eine als starr angenommene Sohlplatte werden die Verwölbungen ω bzw. die Dehnungen ε_z behindert, so dass es zu Normalspannungen $\sigma_z = \sigma_\omega$ kommt, die des Weiteren als Wölbnormalspannungen bezeichnet werden. Wlassow (1964) zeigt die Analogie der Wölbtorsionstheorie zu der Biegetheorie der Stäbe. In Analogie zu den Biegemomenten ergibt die Resultierende dieser Wölbnormalspannungen das Wölbmoment

$$M_\omega = - \int_A \sigma_\omega \cdot {}^S \omega dA, \quad (3.30)$$

wobei ${}^S \omega$ hier die Einheitsverwölbung bezogen auf den Schubmittelpunkt darstellt.

Umgekehrt lässt sich die Wölbnormalspannung eines Punktes i durch

$$\sigma_{\omega,i} = - \frac{M_\omega}{I_\omega} \cdot {}^S \omega_i \quad (3.31)$$

mit dem Wölbwiderstand

$$I_\omega = \int_A {}^S \omega^2 dA \quad (3.32)$$

aus dem Wölbmoment errechnen.

Das Wölbmoment M_ω und das Torsionsmoment $M_{T\omega}$ stehen in der gleichen Beziehung wie M und V in der Biegetheorie. Daher wird das Torsionsmoment $M_{T\omega}$ des Weiteren mit V_ω bezeichnet und es gilt

$$-M'_\omega = V_\omega. \quad (3.33)$$

Für die Schubspannungen folgt damit entsprechend Gl. (3.16)

$$\tau_\omega(z, s) = \frac{V_\omega(z) \cdot S_\omega(s)}{I_\omega \cdot t}, \quad (3.34)$$

wobei $S_\omega(s)$ das statische Wölbmoment des Querschnittsabschnitts bezüglich des Schubmittelpunktes ist,

$$S_\omega(s) = \int_{A_\tau}^s \omega(s) dA. \quad (3.35)$$

Die Drillkrümmung ϑ'' und Verdrehung ϑ des Querschnitts ergeben sich entsprechend der Gln. (3.11) und (3.13) zu

$$\vartheta'' = \frac{M_\omega}{E \cdot I_\omega}, \quad (3.36)$$

$$\vartheta(z) = \frac{M_T \cdot H^3}{6 \cdot E \cdot I_\omega} \left(-\frac{z^3}{H^3} + 3 \cdot \frac{z^2}{H^2} \right). \quad (3.37)$$

Die Verschiebungen u_T , v_T , w_T an der Kragarmspitze infolge der Torsionsbeanspruchung resultieren aus

$$u_{T,i} = -s_{y_i} \cdot \vartheta(H), \quad (3.38)$$

$$v_{T,i} = s_{x_i} \cdot \vartheta(H), \quad (3.39)$$

$$w_{T,i} = s_{\omega_i} \cdot \vartheta'(H). \quad (3.40)$$

3.3 Beliebiger Stabquerschnitt unter Biege- und Torsionsbeanspruchung

3.3.1 Biegebeanspruchung

Allgemein nehmen die Normalspannungen infolge einer Biegebeanspruchung bei einem beliebigen Querschnitt in Richtung der Hauptachsen des Querschnitts einen Extremwert an. Der Winkel zwischen Hauptachsensystem und Ursprungssystem wird nach Bild 3-2 mit φ bezeichnet. Er ergibt sich für $I_x \neq I_y$ aus

$$\varphi = \frac{1}{2} \arctan \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x}, \quad (3.41)$$

wobei I_{xy} , I_x und I_y auf den Schwerpunkt des Querschnitts bezogen sind. Die Hauptträgheitsmomente I_ξ und I_η folgen aus

$$I_{\xi,\eta} = \frac{I_y + I_x}{2} \mp \frac{I_y - I_x}{2} \cdot \sqrt{1 + \tan^2(2\varphi)}. \quad (3.42)$$

Für $I_x = I_y$ und $I_{xy} \neq 0$ gilt $\varphi = 45^\circ$.

Die Hauptträgheitsmomente ergeben sich dann aus

$$I_{\xi,\eta} = I_x \mp I_{xy}. \quad (3.43)$$

Das Flächenzentrifugalmoment $I_{\xi\eta}$ ist im Hauptachsensystem gleich Null.

Haße (2004) stellt ein Verfahren zur Ermittlung der Normalspannungen in einem prismatischen Stab mit unregelmäßigem homogenen Querschnitt vor, bei dem auf die Ermittlung der Hauptachsen verzichtet wird. Der Stab mit beliebigem Querschnitt erfüllt die Bedingungen nach Kap. 3.1. Auf den Stab können als äußere Einwirkungen Querlasten als Einzel- (F_x , F_y) und Linienlast (q_x , q_y) sowie Längslasten (F_z , f_z) und Momente (M_{fx} , M_{fy} , M_{fz} , m_x , m_y , m_z) wirken. Die Lasten rufen in den Querschnitten des Stabes Spannungszustände hervor. Die Resultierenden der Längs- oder Schubspannungszustände sind, wie bereits mit den Gln. (3.7) und (3.8) für den einfachen Rechteckquerschnitt und mit Gl. (3.30) für die Wölbkrafttorsion beschrieben, die Schnittgrößen. Für die Formulierung der Problemlösung in Matrixschreibweise wird der Vektor der Schubspannungsergebnisierenden Schnittgrößen

$$\vec{S}_\tau = \vec{S}_\sigma = \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_\omega \end{pmatrix} \quad (3.44)$$

und der Vektor der normalspannungsergebnisierenden Schnittgrößen

$$\vec{S}_\sigma = \begin{pmatrix} -M_y \\ M_x \\ -M_\omega \end{pmatrix} \quad (3.45)$$

eingeführt.

Die Längslasten und damit die Normalkräfte werden hier vernachlässigt.

Im Rahmen dieser Arbeit werden lediglich Systeme unter den horizontalen Einwirkungen F_x und F_y betrachtet. Damit ergibt sich der Lastvektor

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ M_T \end{pmatrix}. \quad (3.46)$$

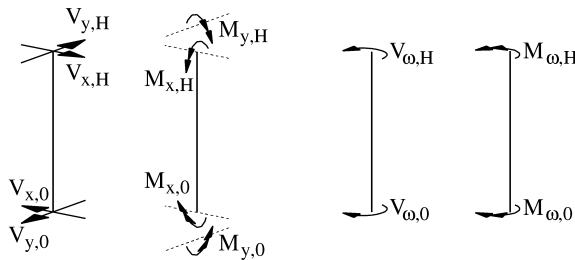


Bild 3-7 : Gleichgewicht am Stabelement

Für den Kragarm resultieren die Schnittgrößen aus dem Gleichgewicht am Stab nach Bild 3-7 zu

$$V_x = F_x, \quad (3.47)$$

$$V_y = F_y, \quad (3.48)$$

$$V_\omega = M_T = F_y \cdot {}^sX_F - F_x \cdot {}^sY_F, \quad (3.49)$$

$$M_x = -F_y \cdot H, \quad (3.50)$$

$$M_y = F_x \cdot H, \quad (3.51)$$

$$M_\omega = V_\omega \cdot H. \quad (3.52)$$

Die Normalspannungen infolge der Momentenbeanspruchung aus Biegung und Torsion ergeben sich für den einfachen Rechteckquerschnitt aus Gl. (3.14) und (3.31). Für den allgemein Fall lassen sich die Normalspannungen ermitteln aus

$$\sigma_i = a_{ki}^{S \rightarrow T} \cdot A^{S \rightarrow -1} \cdot S_{\sigma}^{S \rightarrow}, \quad (3.53)$$

mit

k Querschnittsnummer

i Punktnummer

σ_i Längsspannung im Punkt i

$a_{ki}^{S \rightarrow}$ Einheitsverschiebungsvektor bezogen auf den Schubmittelpunkt S

$A^{S \rightarrow}$ Gesamtquerschnittswertematrix bezogen auf den Schubmittelpunkt

$S_{\sigma}^{S \rightarrow}$ Längsspannungen erzeugende Schnittmomente bezogen auf den Schubmittelpunkt S und das globale X-,Y-Koordinatensystem nach Gl. (3.45).

Im Folgenden wird die Ermittlung des Einheitsverschiebungsvektors $a_{ki}^{S \rightarrow}$ und der Gesamtquerschnittswertematrix $A^{S \rightarrow}$ gezeigt.

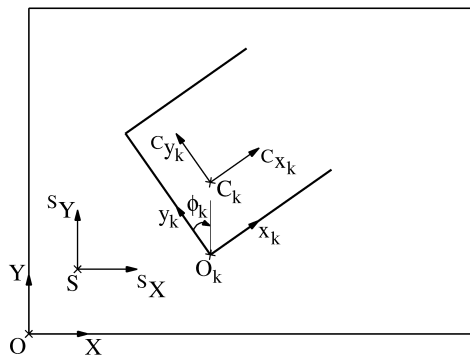


Bild 3-8 : Definition der Koordinatensysteme

Zusätzlich zu denen in Bild 3-1 eingeführten Koordinatensystemen werden in Bild 3-8 zwei weitere Koordinatensysteme eingeführt:

x_k, y_k willkürliches kartesisches Koordinatensystem im Ursprungspunkt O_k des Teilquerschnitts.

c_{x_k}, c_{y_k} parallel zum System im Ursprungspunkt O_k verlaufendes Koordinatensystem im Schwerpunkt C_k des Teilquerschnitts.

X, Y willkürliches kartesisches Koordinatensystem im Ursprungspunkt O des Gesamtquerschnitts.

$^sX, ^sY$ parallel zum System im Ursprungspunkt O verlaufendes Koordinatensystem im Schubmittelpunkt des Gesamtquerschnitts.

Zur Bestimmung der Querschnittswerte werden die Einheitsverschiebungen „1, x_k , y_k und ω_k “ der einzelnen Querschnitte k des Gesamtquerschnitts bezogen auf ihren jeweiligen Ursprungspunkt O_k über der Querschnittsmittellinie aufgetragen. Für x_k und y_k entspricht dies den Querschnittskordinaten der Querschnittsmittellinie ausgehend von Ursprungspunkt O_k . Für die Ermittlung der Einheitsverwölbung ω_k wird der Anfangspunkt der Laufvariablen $s = 0$ in den Ursprungspunkt gelegt. Damit werden die Verwölbungen an diesem Punkt zunächst zu Null angenommen und können von dort aus bis zu den Querschnittsenden mit Hilfe von Gl. (3.29) ermittelt werden. In Bild 3-9 sind die Einheitsverschiebungen exemplarisch für einen U-Querschnitt dargestellt.

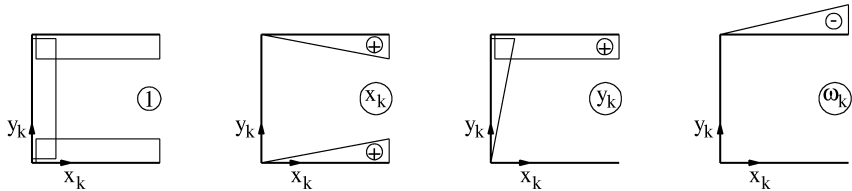


Bild 3-9 : Einheitsverschiebungen eines U-Querschnitts bezogen auf den Ursprungspunkt O_k .

Die Einheitsverschiebungen eines Punktes i werden als Einheitsverschiebungsvektor

$$\vec{a}_{ki} = \begin{pmatrix} 1 \\ x_{ki} \\ y_{ki} \\ \omega_{ki} \end{pmatrix} \quad (3.54)$$

geschrieben.

Die Querschnittswerte resultieren aus der Integration der Einheitsverschiebungen

$$\bar{A}_k = \int_A \vec{a}_k \cdot \vec{a}_k^T dA, \quad (3.55)$$

so dass sich die Querschnittswertematrix ergibt:

$$\bar{A}_k = \begin{pmatrix} \int 1 \cdot 1 \cdot dA & \int 1 \cdot x \cdot dA & \int 1 \cdot y \cdot dA & \int 1 \cdot \omega \cdot dA \\ \int x \cdot 1 \cdot dA & \int x \cdot x \cdot dA & \int x \cdot y \cdot dA & \int x \cdot \omega \cdot dA \\ \int y \cdot 1 \cdot dA & \int y \cdot x \cdot dA & \int y \cdot y \cdot dA & \int y \cdot \omega \cdot dA \\ \int \omega \cdot 1 \cdot dA & \int \omega \cdot x \cdot dA & \int \omega \cdot y \cdot dA & \int \omega \cdot \omega \cdot dA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & A_x & A_y & A_\omega \\ A_x & A_{xx} & A_{xy} & A_{x\omega} \\ A_y & A_{yx} & A_{yy} & A_{y\omega} \\ A_\omega & A_{\omega x} & A_{\omega y} & A_{\omega\omega} \end{pmatrix}_k \quad (3.56)$$

$$\bar{\mathbf{A}}_k = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{A}_x & \mathbf{A}_y & \mathbf{A}_\omega \\ \mathbf{A}_x & \mathbf{A}_{xx} & \mathbf{A}_{xy} & \mathbf{A}_{x\omega} \\ \mathbf{A}_y & \mathbf{A}_{yx} & \mathbf{A}_{yy} & \mathbf{A}_{y\omega} \\ \mathbf{A}_\omega & \mathbf{A}_{\omega x} & \mathbf{A}_{\omega y} & \mathbf{A}_{\omega\omega} \end{pmatrix}_k = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{S}_y & \mathbf{S}_x & \mathbf{S}_\omega \\ \mathbf{S}_y & \mathbf{I}_y & \mathbf{I}_{xy} & \mathbf{I}_{y\omega} \\ \mathbf{S}_x & \mathbf{I}_{xy} & \mathbf{I}_x & \mathbf{I}_{x\omega} \\ \mathbf{S}_\omega & \mathbf{I}_{y\omega} & \mathbf{I}_{x\omega} & \mathbf{I}_\omega \end{pmatrix}_k \quad (3.57)$$

Zur Orientierung sind in Gl. (3.57) die gebräuchlicheren Bezeichnungen, wie sie auch in Kap. 3.2 verwendet werden, dargestellt.

Um die Elemente der ersten Zeile und Spalte der Querschnittswertematrix zu eliminieren, werden die Querschnittswerte der einzelnen Querschnitte auf den Schwerpunkt C_k bezogen. Dies geschieht durch die Transformationsmatrix

$$\bar{\Psi}_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -x_{kC} & 1 & 0 & 0 \\ -y_{kC} & 0 & 1 & 0 \\ -\omega_{kC} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.58)$$

Die Werte x_{kC} und y_{kC} entsprechen den Koordinaten des Schwerpunktes C_k ausgehend vom Ursprungspunkt O_k . Für die Verwölbung bedeutet der Bezug auf den Schwerpunkt eine Veränderung der Lage des gewählten Nullpunktes der Einheitsverwölbung. Die Werte der Transformationsmatrix $\bar{\Psi}_k$ resultieren aus

$$x_{kC} = \frac{\mathbf{A}_{x,k}}{\mathbf{A}_k}, \quad (3.59)$$

$$y_{kC} = \frac{\mathbf{A}_{y,k}}{\mathbf{A}_k}, \quad (3.60)$$

$$\omega_{kC} = \frac{\mathbf{A}_{\omega,k}}{\mathbf{A}_k}. \quad (3.61)$$

Der auf den Schwerpunkt bezogene Einheitsverschiebungsvektor ergibt sich aus

$$\overset{c}{\mathbf{a}}_{ki} = \bar{\Psi}_k \cdot \overset{c}{\mathbf{a}}_{ki}, \quad (3.62)$$

die neue Querschnittswertematrix aus

$$\overset{c}{\bar{\mathbf{A}}}_k = \bar{\Psi}_k \cdot \bar{\mathbf{A}}_k \cdot \bar{\Psi}_k^T. \quad (3.63)$$

Um aus mehreren Querschnitten einen Gesamtquerschnitt zusammensetzen zu können, müssen die Koordinatensysteme der einzelnen Querschnitte k parallel zu dem globalen Koordinatensystem ausgerichtet und auf den Bezugspunkt O des globalen Systems bezogen werden. Dies geschieht durch die Transformationsmatrizen

$$\bar{\Phi}_k = \begin{pmatrix} 0 & \cos \phi_k & -\sin \phi_k & 0 \\ 0 & \sin \phi_k & \cos \phi_k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.64)$$

und

$$\bar{\Lambda}_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -Y_k & X_k & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.65)$$

Darin sind X_k und Y_k die Koordinaten der Ursprungspunktes O_k im Gesamtsystem und ϕ_k der Verdrehwinkel des lokalen Koordinatensystems zum globalen System nach Bild 3-8. Die beiden Matrizen lassen sich zu der Transformationsmatrix

$$\bar{\Gamma}_k = \bar{\Lambda}_k \cdot \bar{\Phi}_k = \begin{pmatrix} 0 & \cos \phi_k & -\sin \phi_k & 0 \\ 0 & \sin \phi_k & \cos \phi_k & 0 \\ 0 & X_k \cdot \sin \phi_k - Y_k \cdot \cos \phi_k & X_k \cdot \cos \phi_k + Y_k \cdot \sin \phi_k & 1 \end{pmatrix} \quad (3.66)$$

zusammenfassen. Außerdem wird die Querschnittswertematrix auf die Elemente der Flächenmomente 2. Grades reduziert, da eine Gesamtquerschnittsfläche nicht definiert ist. Der auf den Ursprungspunkt O des Gesamtsystems bezogene Einheitsverschiebungsvektor der Querschnitte k errechnet sich aus

$$\overset{O}{\overline{a}}_{ki} = \bar{\Gamma}_k^T \cdot \overset{C}{\overline{a}}_{ki} = \begin{pmatrix} \overset{O}{x}_{ki} \\ \overset{O}{y}_{ki} \\ \overset{O}{\omega}_{ki} \end{pmatrix}, \quad (3.67)$$

die neue Querschnittswertematrix aus

$$\overset{O}{\overline{A}}_k = \bar{\Gamma}_k^T \cdot \overset{C}{\overline{A}}_k \cdot \bar{\Gamma}_k = \begin{pmatrix} \overset{O}{A}_{xx} & \overset{O}{A}_{xy} & \overset{O}{A}_{x\omega} \\ \overset{O}{A}_{yx} & \overset{O}{A}_{yy} & \overset{O}{A}_{y\omega} \\ \overset{O}{A}_{\omega x} & \overset{O}{A}_{\omega y} & \overset{O}{A}_{\omega\omega} \end{pmatrix}_k. \quad (3.68)$$

Aus der Summe der k Querschnittswertematrizen resultiert die Gesamtquerschnittswertematrix

$$\bar{\overline{A}} = \sum_k \overset{O}{\overline{A}}_k = \begin{pmatrix} A_{xx} & A_{xy} & A_{x\omega} \\ A_{yx} & A_{yy} & A_{y\omega} \\ A_{\omega x} & A_{\omega y} & A_{\omega\omega} \end{pmatrix}. \quad (3.69)$$

Unter einer Torsionsbeanspruchung verdreht sich der Stab um seine natürliche Drillachse durch den Schubmittelpunkt. Daher müssen die Querschnittswerte auf den Schubmittelpunkt bezogen werden. Dadurch werden $A_{x\omega}$ und $A_{y\omega}$ eliminiert und somit Biegung und Torsion entkoppelt. Dies geschieht mit der Transformationsmatrix

$$\bar{\Theta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ Y_s & -X_s & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.70)$$

wobei sich die Koordinaten X_s und Y_s des Schubmittelpunktes ergeben aus

$$X_s = \frac{A_{XX} \cdot A_{Y\omega} - A_{XY} \cdot A_{X\omega}}{A_{XX} \cdot A_{YY} - A_{XY}^2}, \quad (3.71)$$

$$Y_s = \frac{A_{XY} \cdot A_{Y\omega} - A_{YY} \cdot A_{X\omega}}{A_{XX} \cdot A_{YY} - A_{XY}^2}. \quad (3.72)$$

Der auf den Schubmittelpunkt S des Gesamtsystems bezogene Einheitsverschiebungsvektor des Teilsystems resultiert aus

$$\overset{s}{\underset{a_{ki}}{\longrightarrow}} = \bar{\Theta} \cdot \overset{o}{\underset{a_{ki}}{\longrightarrow}} = \begin{pmatrix} {}^o x_{ik} \\ {}^o y_{ki} \\ {}^s \omega_{ki} \end{pmatrix}, \quad (3.73)$$

wobei die Transformation auf den Schubmittelpunkt sich nur auf die Einheitsverwölbung auswirkt.

Die neue Gesamtquerschnittswertematrix resultiert aus

$$\overset{s}{\underset{A}{\longrightarrow}} = \bar{\Theta} \cdot \bar{A} \cdot \bar{\Theta}^T = \begin{pmatrix} {}^o A_{XX} & {}^o A_{XY} & 0 \\ {}^o A_{YX} & {}^o A_{YY} & 0 \\ 0 & 0 & {}^s A_{\omega\omega} \end{pmatrix}, \quad (3.74)$$

wobei sich auch hier die Transformation nur auf den Wölbwiderstand $A_{\omega\omega}$ auswirkt. Die restlichen Querschnittswerte bleiben auf den Ursprungspunkt O bezogen.

Mit Hilfe des Einheitsverschiebungsvektors $\overset{s}{\underset{a_{ki}}{\longrightarrow}}$ und der Gesamtquerschnittswertematrix $\overset{s}{\underset{A}{\longrightarrow}}$ können die Normalspannungen nach Gl. (3.53) ermittelt werden. Die auftretende Inverse $\overset{s}{\underset{A}{\longrightarrow}}^{-1}$ der Querschnittsmatrix $\overset{s}{\underset{A}{\longrightarrow}}$ ergibt sich mit der Determinante

$$D = {}^o A_{XX} \cdot {}^o A_{YY} - {}^o A_{XY}^2 \quad (3.75)$$

zu

$$\overset{s}{\underset{A}{\longrightarrow}}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{{}^o A_{YY}}{D} & -\frac{{}^o A_{XY}}{D} & 0 \\ -\frac{{}^o A_{XY}}{D} & \frac{{}^o A_{XX}}{D} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{{}^s A_{\omega\omega}} \end{pmatrix}. \quad (3.76)$$

Die Normalspannungen des Punktes i berechnen sich somit aus

$$\sigma_i = -\frac{{}^oA_{YY} \cdot {}^oM_Y + {}^oA_{XY} \cdot {}^oM_X}{D} \cdot x_{ki} + \frac{{}^oA_{XX} \cdot {}^oM_X + {}^oA_{XY} \cdot {}^oM_Y}{D} \cdot y_{ki} - \frac{{}^sM_{\omega}}{sA_{\omega\omega}} \cdot \omega_{ki}. \quad (3.77)$$

Die horizontalen Verformungen des Stabes am Kragarmende setzen sich zusammen aus den Verschiebungen u und v . Für den Stab mit einfachem, rechteckigen Querschnitt wurde die Krümmung v'' nach Gl. (3.11) und die Verschiebungsfunktion $v(z)$ nach Gl. (3.13) infolge einer Biegebeanspruchung angegeben. In diesen Gleichungen sind die Einwirkungen wie auch die Querschnittswerte auf die Hauptachsen im Schwerpunkt des Querschnitts bezogen. Für die Ermittlung der Drillkrümmung ϑ'' und Verdrehung ϑ infolge einer Torsionsbeanspruchung stehen die Gln. (3.36) und (3.37) zur Verfügung. Einwirkungen und Querschnittswerte sind dort auf den Schubmittelpunkt bezogen.

Die Formänderungsmatrix $\overset{s}{\overrightarrow{K}}$ mit den beiden Biegekrümmungen und der Drillkrümmung bezogen auf die Gesamtquerschnittswertematrix nach Gl. (3.74) und den Schnittgrößen nach Gl. (3.45) resultiert aus

$$\overset{s}{\overrightarrow{K}} = \begin{pmatrix} -u'' \\ -v'' \\ -\vartheta'' \end{pmatrix} = \frac{1}{E} \cdot \overset{s}{\overrightarrow{A}}^{-1} \cdot \overset{s}{\overrightarrow{S}}_{\sigma}. \quad (3.78)$$

Aus den Beziehungen der Gln. (3.50) bis (3.52), der Integration wie nach Gl. (3.13) und mit Hilfe von Gln. (3.38) und (3.39) ergeben sich die Verschiebungen u und v am Kragarmende zu

$$u_i = \frac{H^3}{3 \cdot E} \cdot \left(\frac{{}^oA_{YY} \cdot {}^oF_X - {}^oA_{XY} \cdot {}^oF_Y}{D} - \frac{{}^sM_T}{sA_{\omega\omega}} \cdot s y_{ki} \right), \quad (3.79)$$

$$v_i = \frac{H^3}{3 \cdot E} \cdot \left(\frac{-{}^oA_{XY} \cdot {}^oF_X + {}^oA_{XX} \cdot {}^oF_Y}{D} + \frac{{}^sM_T}{sA_{\omega\omega}} \cdot s x_{ki} \right). \quad (3.80)$$

3.3.2 Schubbeanspruchung

Der Schubfluss T_i kann an einer beliebigen Stelle s_i des Gesamtquerschnitts ermittelt werden. Wie für den Stab mit rechteckigem Querschnitt der Gln. (3.16) und (3.18), resultiert er allgemein aus

$$T_i = \overset{s}{\overrightarrow{A}}_{\tau si}^T \cdot \overset{s}{\overrightarrow{A}}^{-1} \cdot \overset{s}{\overrightarrow{S}}_{\tau}, \quad (3.81)$$

mit

$\overset{s}{\overleftarrow{A}}_{tsi}^T = \begin{pmatrix} {}^oA_{xti} & {}^oA_{yti} & {}^sA_{oti} \end{pmatrix}$	Querschnittsmatrix der Flächenmomente 1. Grades des an der Stelle s_i abgetrennten Querschnittsabschnitts A_τ bezogen auf den Ursprungspunkt O und den Schubmittelpunkt S des Gesamtquerschnitts
$\overset{s}{\overrightarrow{S}}_\tau$	Schubspannungen erzeugende Schnittmomente bezogen auf den Schubmittelpunkt S und das globale X-,Y-Koordinatensystem nach Gl. (3.44).

Bei der Ermittlung von $\overset{s}{\overleftarrow{A}}_{tsi}^T$ werden, wie auch bei der Ermittlung der Querschnittswerte für die Berechnung der Normalspannungen, die Querschnittswerte des Querschnittsabschnitts mit der Fläche A_τ nach Bild 3-5 und den Gln. (3.17) und (3.35) zunächst bezogen auf den Ursprungspunkt O_k des einzelnen Querschnitts ermittelt. Aus der Querschnittsmatrix $\overleftarrow{A}_{ktsi}^T$ errechnet sich mit Hilfe der Transformationsmatrizen des dazugehörigen Querschnitts $\overline{\Psi}_k, \overline{\Gamma}_k$ nach den Gln. (3.58) und (3.64) und der Transformationsmatrix des Gesamtquerschnitts $\overline{\Theta}$ nach Gl. (3.70) die Querschnittswertematrix $\overset{s}{\overleftarrow{A}}_{tsi}^T$. Der Schubfluss T_i resultiert somit aus

$$T_i = \frac{{}^oA_{yy} \cdot {}^oA_{xt} - {}^oA_{xy} \cdot {}^oA_{yt}}{D} \cdot V_x + \frac{{}^oA_{xx} \cdot {}^oA_{yt} - {}^oA_{xy} \cdot {}^oA_{xt}}{D} \cdot V_y + \frac{{}^sA_{ot}}{A_{oo}} \cdot V_o, \quad (3.82)$$

mit D nach Gl. (3.75).

Zur Ermittlung der Resultierenden der einzelnen Teilquerschnitte nach Gl. (3.19) muss mindestens der Schubfluss an jedem Ende eines Teilquerschnitts ermittelt werden. Der Verlauf des Schubflusses zwischen den Endpunkten ergibt sich aus dem Verlauf des statischen Moments bezogen auf die Hauptachsen des Querschnitts.

4 Gebäudeaussteifung im Holztafelbau

4.1 Konstruktion im Holztafelbau

Ein Gebäude in Holztafelbauart setzt sich, wie in Bild 4-1 dargestellt, aus Dach-, Decken- und Wandtafeln zusammen, die über ihre umlaufenden Randrippen miteinander verbunden sind. Das Tragverhalten des Gebäudes unter horizontalen Einwirkungen ist vereinfachend folgendermaßen zu beschreiben: Die horizontalen Einwirkungen werden von den Dach- und Außenwandtafeln über Biegung senkrecht zu ihrer Ebene an die Deckentafeln weitergeleitet. Über eine Scheibenbeanspruchung der Deckentafel werden sie dann an die Innen- und Außenwandtafeln abgegeben. Die Aufteilung der horizontalen Einwirkungen auf die einzelnen Wandtafeln ist dabei abhängig von der Lage der Wandtafel im Gebäude und von ihrer Konstruktion, durch die ihre Steifigkeit bestimmt ist. Bevor in Kap. 4.3 auf die sich daraus ergebenden Berechnungsverfahren eingegangen wird, soll zunächst die Konstruktion und das Tragverhalten der Wandtafel genauer betrachtet werden.

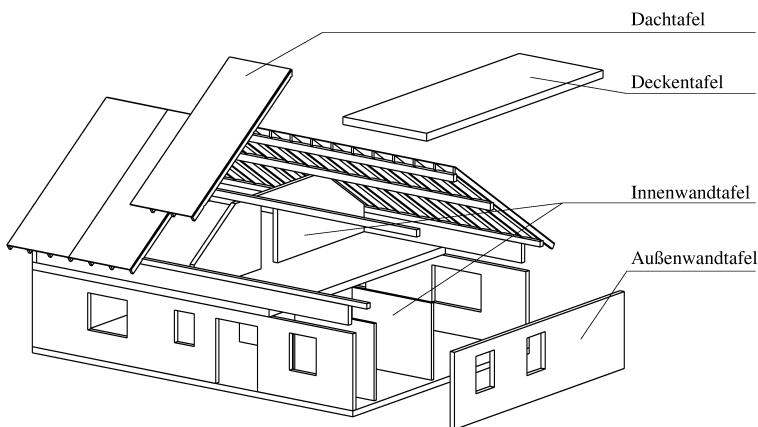


Bild 4-1 : Aufbau eines eingeschossiges Gebäudes in Holztafelbauart

Wandtafeln bestehen, wie in Bild 4-2 zu erkennen, aus in regelmäßigen Abständen angeordneten vertikalen Rippen, die an der Oberseite durch die horizontale Kopfrippo und an der Unterseite durch die horizontale Fußrippe begrenzt sind. Die Rippen sind stabförmige Bauteile, z. B. aus Vollholz, Brettschichtholz, Furnierschichtholz oder in Form von Profilträgern. Die vertikalen Rippen sind meist nur konstruktiv mit den horizontalen Rippen verbunden, so dass die Rippen keinen tragfähigen Rahmen bilden. Erst durch eine ein- oder

beidseitige Beplankung aus Holz- oder Gipswerkstoffen, die durch stiftförmige Verbindungsmittel, das sind Klammern, Nägel oder Schrauben, kontinuierlich mit den Rippen verbunden ist, wird erreicht, dass die Tafel Beanspruchungen in ihrer Ebene Widerstand leisten kann.

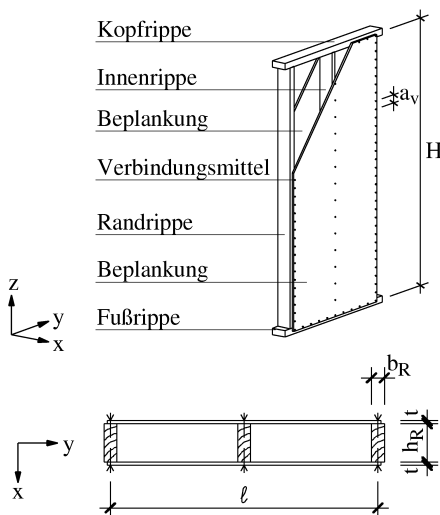


Bild 4-2 : Ansicht und horizontaler Schnitt einer Wandtafelkonstruktion

Die Kopfrippe ist in horizontaler Richtung über die Deckenbalken bzw. zusätzliche Zwischenhölzer in der Deckenbalkenlage mit der Deckenscheibe verbunden. In vertikaler Richtung können Druckkräfte über Kontakt übertragen werden. Ein Zuganschluss der Kopfrippe an die Deckentafel oder die vertikalen Rippen der Wandtafel ist in der Regel nicht vorhanden. Gleiches gilt für die Fußrippe. Im Erdgeschoss ist die Fußrippe entsprechend an die Sohlplatte angeschlossen. Die vertikalen Rippen sind meist über spezielle Anker zugfest mit den vertikalen Rippen der angrenzenden Geschosse oder mit der Sohlplatte verbunden.

Die Querschnittsabmessungen der Rippen und der Beplankung ergeben sich oftmals nicht nur aus statischen Anforderungen. Die Höhe h_R der Rippen wird häufig durch die Dicke der erforderlichen Wärmedämmung bestimmt. Die Dicke t der Beplankung ergibt sich auch aus Anforderungen an den Schall- oder Brandschutz.

Wie in Bild 4-3 dargestellt, befinden sich in einer Wandtafel im Allgemeinen größere Öffnungen für Türen und Fenster. Das Tragverhalten solcher Wandtafeln wird unter anderem von Schulze / Gebhardt (1996) untersucht. Ni / Karacabeyli / Ceccotti (1999) und Källsner / Girhammer / Wu (2002) stellen Berechnungsmodelle vor, bei denen sich auch die Bereiche der Wandtafel mit Öffnungen an der Weiterleitung der horizontalen Einwirkungen beteiligen. Die rechnerische Berücksichtigung dieser Bereiche ist relativ aufwendig. Um die Tragfähigkeit der Wandtafel durch die Berücksichtigung der Bereiche mit Öffnungen wirkungsvoll zu erhöhen, sind zusätzliche konstruktive Maßnahmen erforderlich, die in der Praxis nur schwer umsetzbar sind. Wie in der Einleitung bereits beschrieben und in Bild 4-3 dargestellt, werden daher für die Aussteifung von Gebäuden in Holztafelbauart meist nur Wandtafeln berücksichtigt, die keine großen Öffnungen durch Fenster oder Türen besitzen. Eine Wandtafel wird somit in mehrere aussteifende Wandtafelelemente unterschiedlicher Länge ℓ zerlegt. Im Rahmen dieser Arbeit werden nur rechteckige, beidseitig beplankte Wandtafelelemente mit einer Länge $\ell = 1250$ mm und einer Höhe $H = 2500$ mm betrachtet. Bei üblichem Abstand der vertikalen Rippen enthält ein solches Wandtafelelement eine Innenrippe und zwei Randrippen.

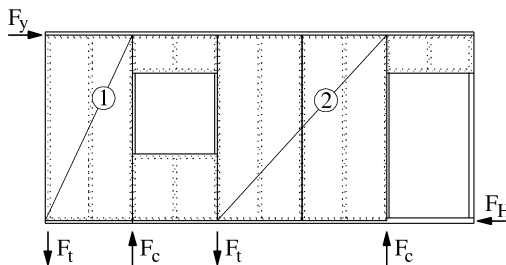


Bild 4-3 : Aufteilung einer Wandtafel in Wandtafelelemente

4.2 Tragverhalten einer Wandtafel

Bei der Betrachtung von Wandtafeln sind grundsätzlich drei Lastfälle zu unterscheiden:

- Horizontale Einwirkung senkrecht zur Ebene der Wandtafel,
- Vertikale Einwirkung in der Ebene der Wandtafel,
- Horizontale Einwirkung in der Ebene der Wandtafel.

Horizontale Flächenlasten, z. B. infolge Wind, wirken senkrecht zu deren Ebene auf die Außenwandtafeln ein. Dabei trägt die Beplankung als Platte und leitet die Einwirkungen an

die Rippen weiter. Für die vertikalen Rippen wird dabei angenommen, dass sie am oberen und unteren Ende gelenkig gelagert sind, obwohl, wie oben beschrieben, hier meist nur eine konstruktive Verbindung zu den horizontalen Rippen und damit zu den horizontalen Scheibenebenen vorhanden ist. Für Kräfte, die aus der Deckenscheibenebene senkrecht zur Wandtafelebene auf die Kopfrippe einwirken, besitzt die Wandtafel nur eine sehr geringe Tragfähigkeit, da die auftretenden Momente am Fußpunkt nur über sehr kleine Hebelarme und nur in Kombination mit vertikalen Einwirkungen abgetragen werden können. Diese sehr geringe Tragfähigkeit wird im Rahmen dieser Arbeit vernachlässigt.

Vertikale Einwirkungen wirken je nach Spannrichtung und Aufbau der Decke als Einzel- oder Streckenlast auf die Kopfrippe. Die Einzellasten greifen meist direkt über den vertikalen Rippen an. Ist dies nicht der Fall sind zusätzliche Unterzüge vorhanden, die die Lasten an die vertikalen Rippen weiterleiten. An der Kopfrippe angreifende Streckenlasten werden auf die vertikalen Rippen verteilt und über die Verbindungsmittel auch in die Beplankung eingeleitet. Der Anteil der Beplankung am vertikalen Lastabtrag ist dabei nicht nur von den vorhandenen Steifigkeiten, sondern auch durch das nichtlineare Tragverhalten der Verbindungsmittel, siehe auch Bild 5-1, von der Beanspruchung der Verbindungsmittel infolge horizontaler Einwirkungen abhängig. Untersuchungen zum Tragverhalten der Wandtafel unter vertikaler Einwirkung und bei gleichzeitiger Wirkung von horizontalen und vertikalen Einwirkungen wurden unter anderem von Muszala (1987) und Raschper (1990) für verankerte Wandtafeln und Källsner et al. (2002, 2004) und Ni / Karacabeyli (2000) für unverankerte oder teilweise verankerte Wandtafeln durchgeführt.

Zum Tragverhalten der Wandtafel unter einer horizontaler Einwirkung in ihrer Ebene liegt eine Vielzahl von Untersuchungen vor. Unter anderen sind hier die Arbeiten von Tuomi / McCutcheon (1978), Schulze (1982), Källsner (1983), Källsner et al. (1995, 2001, 2004) Raschper (1990), Kessel / Schönhoff (2001/1), Kessel (2003/1), Kessel / Sandau-Wietfeldt (2003/2, 2005) und Dettmann (2003) zu nennen. Eine über die Schubfeldmethode hinausgehende Theorie zur umfassenden Beschreibung des Tragverhaltens von Holztafeln und zur Bestimmung ihrer Tragfähigkeit und Steifigkeit liegt bis heute jedoch nicht vor. In der Literatur werden unterschiedliche statische Modelle beschrieben, von denen die drei wichtigsten in Bild 4-4 dargestellt sind. Die Modelle haben gemeinsam, dass

- die horizontale Einwirkung als Einzellast in der Stabachse der Kopfrippe angreift,
- die Beplankung nicht beult,
- die Innenrippe vernachlässigt wird, da sie weitgehend nur ein Beulen der Beplankung verhindern soll, und

- die beiden Randrippen vertikal und die Kopfrippe horizontal starr gelagert sind.

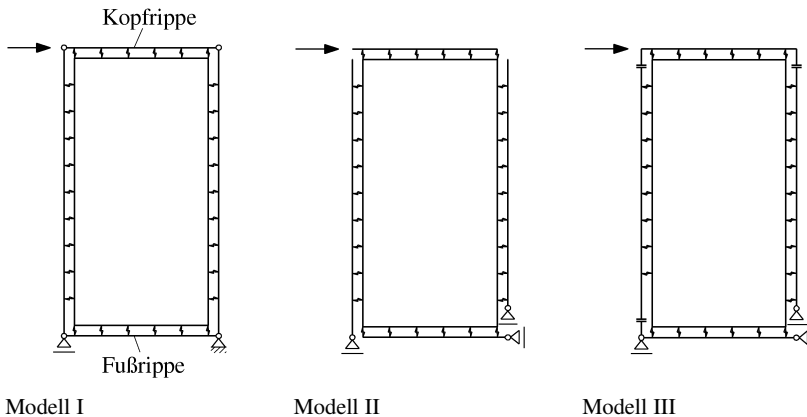


Bild 4-4: Statische Modelle einer Wandtafel, s. auch Dettmann (2003)

Beim statisch unbestimmten Modell I wird angenommen, dass die Rippen in den Ecken gelenkig miteinander verbunden sind. Wie in Bild 4-5 dargestellt, verformen sich unter der Voraussetzung einer linearen Last-Verformungsbeziehung der Verbindungsmittel zwischen Rippen und Beplankung die Rippen durch die Horizontalverschiebung v der Kopfrippe zu der unverschieblichen Fußrippe zu einem Parallelogramm. Die Beplankung erfährt eine Starrkörperverdrehung ϕ um ihren Mittelpunkt D . Dadurch kommt es für die Rippen zu Beanspruchungen quer zu ihren Längsachsen und somit zu Biegebeanspruchungen. Durch die gelenkige Verbindung in den Ecken müssen dort somit Querkkräfte bzw. Druck- oder Zugkräfte übertragen werden. Die meist nur konstruktive Verbindung der Ecken durch Hirnholz- oder Schrägnagelung kann diese Kräfte nicht übertragen. Der rechnerische Nachweis dieses statisch unbestimmten Modells ist mit großem Aufwand verbunden.

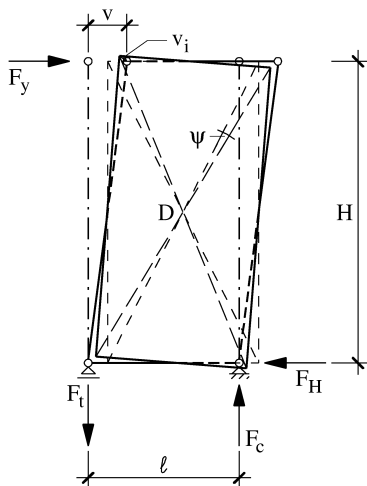


Bild 4-5 : Verformtes Modell I, s. auch Kessel (2002/2)

Kessel / Schönhoff (2001/1) und Kessel (2003/1) gehen davon aus, dass die Rippen in den Ecken nicht miteinander verbunden sind und beschreiben das Tragverhalten auf Grundlage der Schubfeldtheorie. Auch die Bemessungsverfahren für Tafeln in der DIN 1052:2004-08 sind auf Grundlage dieser Theorie entstanden. Das Schubfeldverfahren geht auf Arbeiten im Flugzeugbau zurück. Von Czerwenka / Schnell (1967) ist das Verfahren für die praktische Anwendung im Stahlleichtbau aufgearbeitet worden, so dass es in Deutschland für die Berechnung von aussteifenden Scheiben mit Stahl- oder Aluminiumtrapezblechen angewandt wird. Voraussetzung für die Anwendung des Schubfeldverfahrens ist, dass die Felder im Gegensatz zu den Randrippen eine vernachlässigbare Längssteifigkeit besitzen. Dies ist im Holztafelbau durch die Nachgiebigkeit der Verbindung zwischen Rippen und Beplankung und durch die relativ dünnen Beplankungswerkstoffe näherungsweise gegeben. Bei Anwendung des Verfahrens zur Berechnung von Wandtafeln tritt, wie in Bild 4-6 dargestellt, für die Beplankung eine reine Schubbeanspruchung und damit verbunden nur Verbindungsmittelbeanspruchungen parallel zum Beplankungsrand auf. Die Beanspruchung des Verbundes parallel zum Beplankungsrand wird mit $s_{v,0}$ bezeichnet. Für die Rippen bedeutet dies, dass, wie in Bild 4-6 zu erkennen, nur Beanspruchungen in Richtung der Rippenlängsachse, also parallel zur Faserichtung des Holzes, auftreten. Diese Beanspruchungen ergeben sich auch aus dem Modell II nach Bild 4-4, in dem die Rippen nicht miteinander verbunden sind. In der FE-Simulation dieses Modells kommt es, wie in

Bild 4-7 verdeutlicht, zu Überlappungen oder Durchdringungen der Rippen, wie sie in Wirklichkeit natürlich nicht vorkommen können.

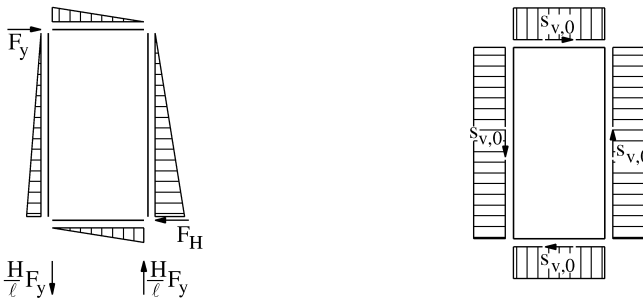


Bild 4-6 : Beanspruchungen der Rippen und des Verbundes von Rippen und Beplankung einer Wandtafel bei Anwendung des Schubfeldmodells, aus Kessel (2004)

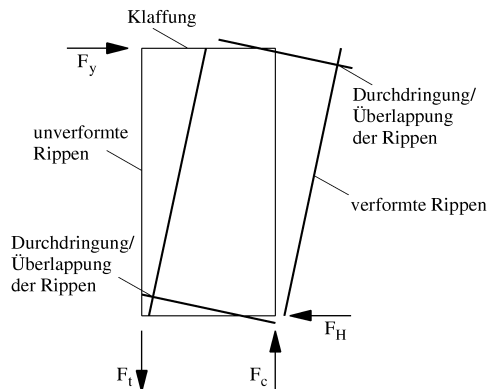
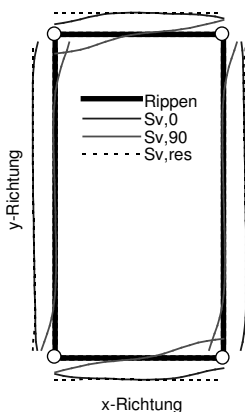


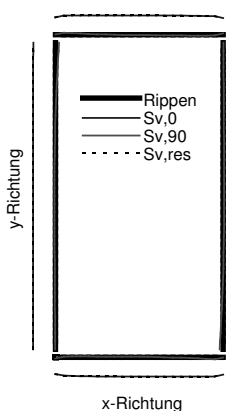
Bild 4-7 : Überhöhte Darstellung der Rippenverformungen des Modells II

Aus diesem Grund erscheint es sinnvoll, wie Dettmann (2003) und vorher Raschper (1990), die mögliche Druckübertragung zwischen den Rippen durch Kontaktstöße zu berücksichtigen. Diese Kontaktstöße übertragen vertikale Druckkräfte und lassen bei Zugkräften Klaffungen zwischen den Rippen zu. Horizontale Kräfte können nicht übertragen werden, obwohl dies bei vorhandenen vertikalen Druckkräften infolge von Reibung denkbar wäre. Dieses Tragverhalten entspricht dem des Modells III in Bild 4-4.

Dettmann (2003) und Kessel / Sandau-Wietfeldt (2005) vergleichen die vorgestellten Modelle unter Berücksichtigung von starren und steifen Rippen sowie linearem und nichtlinearem Last-Verformungsverhalten der Verbindungsmittel. In Bild 4-8 sind die Beanspruchungen der Verbindungsmittel über den Schubfluss $s_{v,0}$ (parallel zum Beplankungsrand), $s_{v,90}$ (senkrecht zum Beplankungsrand) und der daraus resultierenden Beanspruchung $s_{v,res}$ aus Kessel / Sandau-Wietfeldt (2005) dargestellt. Die Simulation erfolgt dort unter Berücksichtigung der Steifigkeit der Rippen und mit einer bilinearen Verbindungsmittelsteifigkeit nach Bild 5-1. Bild 4-8 zeigt, dass es beim Modell I auch bei Erreichen der Traglast der Wandtafel, also bei Ausschöpfung der Tragreserven aller Verbindungsmittel, zu Verbindungsmittelbeanspruchungen senkrecht zum Rand kommt, die sich in den Ecken der Wandtafel konzentrieren. Im Modell II kommt es fast ausschließlich zu Beanspruchungen parallel zum Rand. Modell I hat eine um etwa 15 % größere Tragfähigkeit. Dettmann (2003) und Kessel / Sandau-Wietfeldt (2005) kommen beide zu dem Schluss, dass eine Berechnung von Wandtafeln mit dem Modell II sinnvoll ist. Voraussetzung für dieses vereinfachte Vorgehen ist, dass, wie z. B. von Kessel / Huse / Augustin (2001/2) beschrieben, die Abstände der Verbindungsmittel zum Rand der Beplankung und der Rippen so groß sind, dass ein Plastizieren der Verbindungsmittel möglich ist und es nicht zu einem Abplatzen oder Ausbrechen der Ränder kommt. Auf die Berechnung von Wandtafeln und die Ermittlung der Verformungen und Steifigkeiten wird in Kap. 5 näher eingegangen.



Modell I, steife Rippen, nichtlineare
Verbindungsmittelsteifigkeit



Modell II, steife Rippen, nichtlineare
Verbindungsmittelsteifigkeit

Bild 4-8 : Beanspruchung der Verbindungsmittel im Traglastzustand; aus Kessel / Sandau-Wietfeldt (2005)

4.3 Berechnungsverfahren zur Abschätzung der Verteilung der horizontalen Beanspruchungen auf die einzelnen Wandtafeln

Aufgrund der beschriebenen Unterschiede im Trag- und Verformungsverhalten von Gebäuden in Holztafelbauart zu denen aus Stahlbeton entwickelten Cziesielski (1982) und später Steinmetz (1992), aufbauend besonders auf den Arbeiten von v. Halász / Tantow (1966/1, 1966/2), vereinfachte Verfahren zur Abschätzung der Verteilung der horizontalen Beanspruchungen auf orthogonal angeordnete, einzelne Wandtafeln eines einzelnen Geschosses. Heinisuo (1986), Schmidt / Moody (1989) und Kessel (2002/2) zeigen, dass sich diese ingenieurmäßig hergeleiteten Verfahren mit Hilfe der Energiemethoden für beliebige Orientierungen der Wände verallgemeinern und auf die Lösung von 3 algebraischen Gleichungen zurückführen lassen.

Ein wesentliches Merkmal aller Verfahren im Holztafelbau ist die Reduzierung des räumliche Tragwerks eines Geschosses auf ein ebenes Modell. Die ungestörten Bereiche der Wände eines Geschosses, die keine Tür- oder Fensteröffnungen besitzen, werden als einzelne Wandtafeln betrachtet. Die einzelnen Wandtafeln sind horizontal über die als starr angenommene Deckentafel, auf die das horizontale Kräftesystem einwirkt, und vertikal indirekt über die Lagerungen der Wandtafeln miteinander verbunden. Die Verteilung der horizontalen Einwirkungen auf die einzelnen Wandtafeln wird in Abhängigkeit der Lage der Wände im Grundriss und der Steifigkeit in ihrer Ebene C_j ermittelt. Die Steifigkeit C_j ergibt sich allgemein aus

$$C_j = \frac{F_{y,j}}{v_j}. \quad (4.1)$$

Auf die Ermittlung dieser Steifigkeit wird in Kap. 5 noch näher eingegangen. Kommt es aufgrund der Grundrissgeometrie zu Wandstellungen in U-, L- oder T-Form, wie z. B. in Bild 3-2 dargestellt, werden die einzelnen Wände bei den bestehenden Verfahren nicht, wie noch in Kap. 3 für den Bereich des Stahlbetonbaus gezeigt, zu einem Querschnitt zusammengefasst, sondern weiterhin als einzelne Wände betrachtet. Auf das Tragverhalten solcher zu einem Querschnitt zusammengefassten Wandtafeln wird in Kap. 6 genauer eingegangen. Das Verfahren von Kessel (2002/2) wird hier kurz näher vorgestellt, wobei Bezüge zu dem vorgestellten Verfahren aus dem Stahlbetonbau in Kap. 3 hergestellt werden.

Das Gleichungssystem von Kessel (2002/2) hat die Form

$$\vec{C} \cdot \overset{0}{\vec{U}} - \overset{0}{\vec{F}} = 0. \quad (4.2)$$

Darin ist $\overline{\mathbf{C}}$ die einem Geschoss zugehörige globale Steifigkeitsmatrix, die von der Lage der Wände im Grundriss, ihrer Konstruktion, den Materialsteifigkeiten und den Abmessungen abhängig ist. In ihr sind die lokalen Steifigkeitsmatrizen $\overline{\mathbf{C}}_j$ der einzelnen Wände j enthalten.

Sie haben die einfache Form

$$\overline{\mathbf{C}}_j = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.3)$$

da die Wände nur Beanspruchungen in ihrer Ebene Widerstand leisten. Das Vorgehen bei der Berechnung der globalen Steifigkeitsmatrix entspricht dem bei der Berechnung der Gesamtquerschnittsmatrix in Kap. 3. Die Steifigkeitsmatrizen nach Gl. (4.3) werden mit Hilfe der Transformationsmatrizen nach Gl. (3.64) - (3.66) und (3.68) auf den Ursprungspunkt O des globalen Systems bezogen und entsprechend Gl. (3.69) zu der globalen Steifigkeitsmatrix $\overline{\mathbf{C}}$ zusammengefasst.

$${}^o\overline{\mathbf{U}} = \begin{pmatrix} u_o \\ v_o \\ \varphi \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

in Gl. (4.2) ist das zweidimensionale Verschiebungsfeld der starren Deckenscheibe. Es setzt sich zusammen aus den Translationen in x- und y-Richtung und einer Verdrehung um die z-Achse bezogen auf den Bezugspunkt O.

${}^o\overline{\mathbf{F}}$ ist ein ebenes, horizontales Kräftesystem bezogen auf den Bezugspunkt O. Es entspricht dem Lastvektor nach Gl. (3.46), nur dass hier das Torsionsmoment auf den Punkt O und nicht auf den Schubmittelpunkt S bezogen ist.

Der lokale Verschiebungsvektor $\overline{\mathbf{U}}_j$ der einzelnen Wandtafel ergibt sich mit Hilfe der transponierten Transformationsmatrix nach Gl. (3.66) aus

$$\overline{\mathbf{U}}_j = \overline{\mathbf{\Gamma}}_j^T \cdot {}^o\overline{\mathbf{U}}. \quad (4.5)$$

Die Horizontalkomponente der einzelnen Wand resultiert aus der Multiplikation mit der lokalen Steifigkeitsmatrix nach Gl. (4.3).

Wie in Kap. 6 noch gezeigt wird, liefern die beschriebenen Verfahren nur richtige Ergebnisse, wenn von einer starren Lagerung der Wandtafeln ausgegangen werden kann. Die Annahme von starren Lagerungen und Verbindungen erscheint zumindest für mehrgeschossige Gebäude in Holztafelbauart jedoch nicht zulässig. Die Untersuchungen von Kessel / Dettmann (2000/1, 2000/2) an räumlichen Stabwerken unter Berücksichtigung von nicht starren Lagerungen

haben gezeigt, dass dann die vertikalen Einwirkungen und das Tragverhalten von Wandtafelgruppen in L-, T- und U-Form einen großen Einfluss auf die Verteilung der horizontalen Einwirkungen haben. Das Verhalten der räumlichen Modelle war dabei hochgradig nichtlinear und konnte nicht mit Hilfe herkömmlicher 2D-Modelle abgebildet werden.

5 Modellierung einer Wandtafel

5.1 FE-Modell einer Wandtafel

Die in Kap. 4 erwähnten Untersuchungen von Wandtafeln haben gezeigt, dass das Trag- und Verformungsverhalten einer Wandtafel in guter Näherung durch das Schubfeldmodell (Modell II) beschrieben werden kann. Daher wird dieses Modell für die hier zu führenden Untersuchungen gewählt. Die Simulation erfolgt mit Hilfe des FE-Programms ANSYS. Die bisherigen Untersuchungen von Wandtafeln wurden immer an zweidimensionalen Modellen durchgeführt, was für die dort verfolgten Forschungsziele auch vollkommen ausreichend war. Hier soll das räumliche Zusammenwirken der Wandtafeln untersucht werden. Es ist daher sinnvoll, die Wandtafel mit Elementen zu simulieren, die gegebenenfalls auch für weiterführende räumliche Untersuchungen geeignet sind. Um den Rechen- und Simulationsaufwand zu begrenzen und um eine analytische Lösung für das räumliche Zusammenwirken der Wandtafeln finden zu können, ist es außerdem sinnvoll, nur Steifigkeiten zu berücksichtigen, die das Tragverhalten der Wandtafel wesentlich beeinflussen. Das erstellte Modell wird durch Vergleiche mit anderen Forschungsarbeiten und Versuchsergebnissen verifiziert.

5.1.1 Diskretisierung der Rippen

Die Rippen werden mit dem dreidimensionalen Balkenelement **beam4** der ANSYS-Elementbibliothek simuliert. Es handelt sich dabei um ein Zwei-Knotenelement mit jeweils 6 Freiheitsgraden (Translation in x-, y- und z-Richtung und Rotation um die x, y- und z-Achse). Die Achsabstände der Rippen entsprechen den Abmessungen der Wandtafel. Damit haben die vertikalen Randrippen eine Länge von 2500 mm und die Kopf- und Fußrippe eine Länge von je 1250 mm. Die Querschnitts- und Materialwerte der Rippenelemente sind in Tabelle 5-1 aufgelistet. Der gewählte Elastizitätsmodul entspricht dem $E_{0,mean}$ eines Nadelholzes der Festigkeitsklasse C24 nach DIN 1052: 2004-08. Die eigentlich orthotropen Eigenschaften des Holzes können nach Kasal (1983) vernachlässigt und durch isotrope Eigenschaften ersetzt werden. Der Einfluss der Rippensteifigkeit auf das Tragverhalten der Wandtafel wird im Rahmen der Verifikation des FE-Modells untersucht, um die Rippen für die weiteren Untersuchungen als starr annehmen zu können. Da mit dem Modell II gearbeitet wird, sind die Rippen untereinander nicht verbunden. Die Länge der einzelnen Balkenelemente einer Rippe entspricht dem Verbindungsmittelabstand a_v , wie er in Bild 4-2 zu erkennen ist. Die vertikalen Randrippen sind in z-Richtung und die Fußrippe ist in y-Richtung gelagert. Da dreidimensionale Elemente verwendet werden, müssen den Elementen auch die

entsprechenden Lagerungsbedingungen gegeben werden. Daher sind alle Rippen an ihren beiden Enden senkrecht zur Wandtafelebene in x-Richtung und an einem Ende gegen Verdrehen um die lokale x-Achse des Elements gelagert. Alle Lagerungen werden zunächst als starr angenommen. Die horizontale Einwirkung greift als Einzellast F_y in der Stabachse der Kopfripe an. Innenrippen werden nicht simuliert.

Elastizitätsmodul E	$E_x = E_y = E_z = 11000 \text{ N/mm}^2$ bzw. ∞
Schubmodul G	$G_{xy} = G_{yz} = G_{xz} = 5500 \text{ N/mm}^2$ bzw. ∞
Rippenbreite b_R	$b_R = 60 \text{ mm}$
Rippenhöhe h_R	$h_R = 180 \text{ mm}$

Tabelle 5-1: Eingabeparameter für die Rippenelemente

5.1.2 Diskretisierung der Beplankung

Die Beplankung wird mit Schalenelementen **shell63** simuliert. Es handelt sich dabei um ein Vier-Knotenelement mit jeweils 6 Freiheitsgraden pro Knoten. Die beidseitige Beplankung wird zu einer Scheibe mit einer Dicke $t = 30 \text{ mm}$ zusammengefasst, die so angeordnet ist, dass keine Torsionsbeanspruchung der Rippen und eine reine Membranbeanspruchung der Schalenelemente auftritt. Wie z. B. bei Dettmann (2003) beschrieben, haben eine Vielzahl von Untersuchungen gezeigt, dass der Anteil der Beplankung an der Gesamtverformung der Wandtafel nur sehr gering ist. Dieser Anteil wird hier vernachlässigt, indem die Materialeigenschaften als annähernd starr angenommen werden. Die Feinheit der Diskretisierung richtet sich wie schon bei den Rippen nach dem Abstand der Verbindungsmittel. Die Schalenelemente sind senkrecht zur Tafelebene starr an die Rippen gekoppelt, um die räumlichen Lagerungsbedingungen zu erfüllen.

Elastizitätsmodul E	$E_x = E_y = E_z = \infty$
Schubmodul G	$G_{xy} = G_{yz} = G_{xz} = \infty$
Beplankungsdicke t	$t = 30 \text{ mm}$

Tabelle 5-2: Eingabeparameter für die Beplankungselemente

5.1.3 Diskretisierung der Verbindungsmittel zwischen Beplankung und Rippen

Der Verbund von Rippen und Beplankung wird durch stiftförmige Verbindungsmittel hergestellt und in der Regel als kontinuierlich vorausgesetzt. Die Beanspruchbarkeit des Verbundes ergibt sich aus mehreren Material- und Geometrieparametern. Materialparameter sind das Fließmoment M_y und der Kopfdurchziehparameter f_2 des Verbindungsmittels durch den Plattenwerkstoff und die Lochleibungsfestigkeit f_h von Holz und Plattenwerkstoff. Wesentliche Geometrieparameter für die Beanspruchbarkeit des Verbundes sind neben der Plattendicke t_1 und der Eindringtiefe t_2 des Verbindungsmittels in das Holz der Abstand a zum Rippenrand und der Winkel ϕ , den die Richtung der durch das Verbindungsmittel übertragenen Kraft F und der Plattenrand einschließen. Die Steifigkeit des Verbundes von Rippen und Beplankung im Verhältnis zur Steifigkeit der Rippen und der Beplankung selbst hat erheblichen Einfluss auf die Beanspruchung der Beplankung als Scheibe.

Wie die Kraft-Verschiebungskurven von Nägeln mit unterschiedlichem Durchmesser in verschiedenen Materialien in Bild 5-1 zeigen, besitzen Verbindungsmittel ein nichtlineares Tragverhalten. Es treten große Steifigkeitsunterschiede in Abhängigkeit der verwendeten Materialien und Verbindungsmittel auf. Die Kraft-Verschiebungskurven haben gemeinsam, dass sich nach einer sehr hohen Anfangssteifigkeit der Verbindung, bei der es infolge von Kräften zwischen 200 N und 900 N zu Verformungen von weniger als 0,5 mm kommt, sich ein ausgedehntes Fließplateau anschließt, bei dem es zu einer Laststeigerung von etwa 40 % verbunden mit einer Verformung von etwa 5mm kommt. Außerdem sind in Bild 5-1 die bilineare Last-Verformungskurve von Kessel / Sandau-Wietfeldt (2005) und die nichtlineare Last-Verformungskurve von Dettmann (2003) dargestellt. Wie in Bild 4-8 zu erkennen, zeigen die Untersuchungen von Kessel / Sandau-Wietfeldt (2005), dass es bei dem hier gewählten Modell II im Traglastzustand auch bei Berücksichtigung der Steifigkeit der Rippen zu einer konstanten Beanspruchung der Verbindungsmittel parallel zur Faser der Rippen kommt. Das Tragverhalten der Wandtafel bei Steigerung der Last wird dort so beschrieben, dass bei einer Beanspruchung der Wandtafel auf elastischem Berechnungsniveau die Verbindungsmittel in den Ecken der Beplankung zunächst höher beansprucht werden. Bei einer weiteren Steigerung der Last plastizieren diese Verbindungsmittel als erstes. Haben alle Verbindungsmittel die Plastizitätsgrenze erreicht, kommt es zu der beschriebenen konstanten Beanspruchung der Verbindungsmittel und die Traglast der Wandtafel ist erreicht.

Auch bei linearem Tragverhalten der Verbindungsmittel und starren Rippen kommt es zu dieser konstanten Beanspruchung. Daher wird hier, um den Rechen- und Modellierungsaufwand zu begrenzen, trotz des ausgeprägt nichtlinearen Tragverhaltens für

die Simulation der Verbindungsmittel ein lineares Tragverhalten angenommen. Die Beanspruchungen der Rippen, der Beplankung und des Verbundes im FE-Modell entsprechen somit denen der realen Wandtafel bei Erreichen der Traglast. Die Last-Verformungskurve einer realen Wandtafel wird maßgeblich von der Steifigkeit der Verbindungsmittel beeinflusst und ähnelt damit den Kraft-Verschiebungsdiagrammen der Lochleibungsprüfungen in Bild 5-1. Im Vergleich zur realen Wandtafel verhält sich das FE-Modell bei geringer Beanspruchung entsprechend der angenommenen linearen Steifigkeit der Verbindungsmittel wesentlich weicher. Bei höheren Beanspruchungen im Bereich der Traglast verhält sich das verwendete lineare FE-Modell steifer als die meisten realen Wandtafeln. Insbesondere bei der Betrachtung mehreren zusammenhängender Wandtafel mit Hilfe des linearen FE-Modells kann die Vernachlässigung dieses nicht linearen Verformungsverhaltens der realen Wandtafel zu einer Fehleinschätzung des Tragverhaltens führen. Dies sollte in weiterführenden Arbeiten untersucht werden.

Die Verbindungsmittel zwischen Beplankung und Rippen werden mit Hilfe des Federelements **combin14** simuliert. Ein Verbindungsmittel wird mit Hilfe von je einem Federelement in y- und z-Richtung simuliert, was der besseren Auswertbarkeit der Ergebnisse dient. Die Steifigkeit C_F der Federelemente für den beidseitigen Anschluss der Beplankung wird aus dem Verschiebungsmodul K_u zweier Nägel, $d = 2,2$ mm, nach DIN 1052: 2004-08 ermittelt. Für die Rippen wird Vollholz, Festigkeitsklasse C24, angenommen. Der Verschiebungsmodul eines Nagels ergibt sich zu

$$K_u = \frac{2}{3} \cdot K_{ser} = \frac{2}{3} \cdot \frac{P_k^{1,5}}{25} \cdot d^{0,8} = \frac{2}{3} \cdot \frac{350^{1,5}}{25} \cdot 2,2^{0,8} = 328 \text{ N/mm.} \quad (5.1)$$

Für die Steifigkeit eines Federelements wird

$$C_F = 650 \text{ N/mm} \quad (5.2)$$

gewählt.

Es wird ein Verbindungsmittelabstand $a_v = 62,5$ mm angenommen. Für die Federelemente an den Enden der Rippen, also in den Ecken der Wandtafel, werden jeweils die halben Steifigkeiten berücksichtigt.

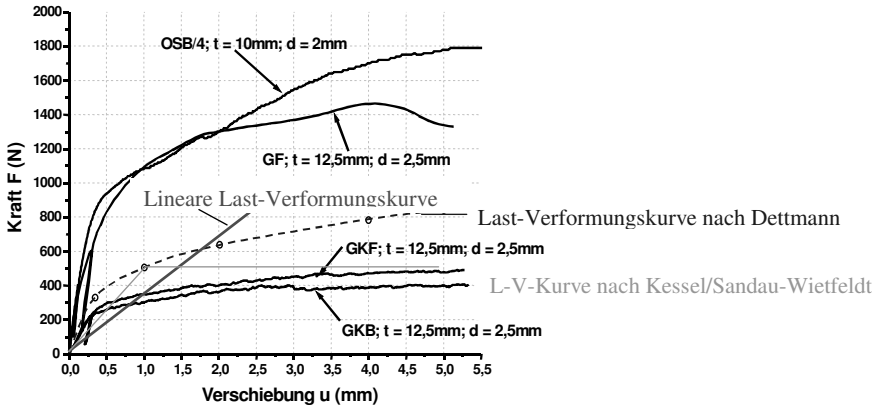


Bild 5-1 : Kraft-Verschiebungsdiagramm einer Lochleibungsprüfung nach EN383 [54], Last-Verformungskurven nach Dettmann (2003) und Kessel / Sandau-Wietfeldt (2005), hier verwendete lineare Last-Verformungskurve

Der Bemessungswert der Tragfähigkeit R_d eines solchen Nagels kann nach DIN 1052: 2004-08 ermittelt werden und ergibt sich zu

$$R_d = 350 \text{ N.} \quad (5.3)$$

5.1.4 Verifikation des FE-Modells

Das FE-Modell der Wandtafel zeigt das erwartete Tragverhalten. Die Beanspruchungen der Rippen, der Beplankung und der Verbindungsmittel sind mit Hilfe einfacher Handrechnungen nachvollziehbar. Es ergibt sich der, bereits in Bild 4-6 dargestellte, lineare Verlauf der Normalkräfte in den Rippen. Querkräfte und damit auch Momente sind in den Rippen nicht vorhanden. Die maximalen Normalkräfte N_{\max} entsprechen den vertikalen Auflagerreaktionen F_v lassen sich über die Gleichgewichtsbedingungen ermitteln, da ein statisch bestimmtes System vorliegt,

$$|N_{\max}| = |F_v| = F_y \cdot \frac{H}{\ell} = 20000 \text{ N,} \quad (5.4)$$

mit der horizontalen Einwirkung $F_y = 10000 \text{ N}$ in der Kopfriple.

Die konstante Schubbeanspruchung der Beplankung im FE-Modell ergibt sich analytisch aus

$$\tau_{xz} = \frac{V_y}{t \cdot \ell} = \frac{10000}{30 \cdot 1250} = 0,27 \text{ N/mm}^2, \quad (5.5)$$

mit $V_y = F_y$.

Der lineare Verlauf der Normalkräfte und die konstante Schubbeanspruchung der Beplankung zeigen die konstante Beanspruchung der Federelemente, die parallel zur Längsachse der Rippe angeordnet sind. Die Beanspruchung der einzelnen Feder ergibt sich direkt aus der maximalen Normalkraft in der Rippe, der Schubbeanspruchung der Beplankung oder wie meist in der neueren Literatur über den Schubfluss

$$s_{v,0} = \frac{F_y}{\ell} = \frac{10000}{1250} = 8 \text{ N/mm} . \quad (5.6)$$

Die Federbeanspruchung F_F im FE-Modell folgt mit Hilfe des Verbindungsmittelabstandes aus

$$F_F = s_{v,0} \cdot a_v = 8 \cdot 62,5 = 500 \text{ N} . \quad (5.7)$$

Da eine Feder durch die angenommene beidseitige Beplankung immer zwei Verbindungsmittel simuliert, liegt die Beanspruchung eines Verbindungsmittel mit $F_{VM} = 250 \text{ N}$ unter dem Bemessungswert der Tragfähigkeit nach Gl. (5.3).

Bei Berücksichtigung der Steifigkeit der Rippen ist die Beanspruchung der Verbindungsmittel einer Rippe nicht mehr konstant und der Normalkraftverlauf in der Rippe somit nicht mehr linear. Der Maximalwert der Normalkraft bleibt gleich, da immer noch ein statisch bestimmtes System vorliegt. Die Verbindungsmittel an den Lasteinleitungs- bzw. Auflagerpunkten werden in Abhängigkeit der Verbindungsmittelsteifigkeit und des Verbindungsmittelabstands höher beansprucht. Die Schubspannungen in der Beplankung sind entsprechend nicht mehr konstant. Bei Berücksichtigung des nichtlinearen Tragverhaltens der Verbindungsmittel schwächen sich die Einflüsse der Rippensteifigkeit, wie von Kessel/Sandau-Wietfeldt (2005) beschrieben, wieder ab, da die höher beanspruchten Verbindungsmittel dann eher anfangen zu plastizieren und die Verbindungsmittelbeanspruchungen entlang der Rippe somit wieder annähernd gleichmäßig verteilt sind.

Infolge der horizontalen Beanspruchung kommt es zu denen, bereits in Bild 4-7 beschriebenen, Überlappungen und Klaffung der Rippen in den Ecken der Wandtafel. Die Beplankung verdreht sich um ihren Mittelpunkt. Es tritt nur eine Relativverschiebung der Rippen gegenüber der Beplankung parallel zum Rand der Beplankung auf. Die Relativverschiebung entspricht den Verformungen der Verbindungsmittel. Senkrecht zum Rand der Beplankung tritt keine Relativverschiebung zwischen Rippe und Beplankung auf.

Wenn im Rahmen dieser Arbeit von der horizontalen Verformung der Wandtafel gesprochen wird, ist des Weiteren immer die horizontale Verformung der Kopfrippe am Lasteinleitungspunkt gemeint. Die horizontale Verformung des FE-Modells der Wandtafel beträgt hier $v = 4,62$ mm. Diese Verformung ist nach Kessel / Schönhoff (2001/1) oder Kessel (2003) analytisch zu ermitteln mit

$$v = \frac{2 \cdot a_v}{C_F} \cdot \left(\frac{1}{\ell} + \frac{1}{H} \right) \cdot \frac{F_y \cdot H}{\ell} = \frac{2 \cdot 62,5}{650} \cdot \left(\frac{1}{1250} + \frac{1}{2500} \right) \cdot \frac{10000 \cdot 2500}{1250} = 4,62 \text{ mm.} \quad (5.8)$$

Die Verformungen infolge der Rippensteifigkeit sind durch die Gleichung

$$v_R = \frac{F_y \cdot H}{\ell} \cdot \frac{H}{\ell} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{H}{E \cdot A} = \frac{10000 \cdot 2500}{1250} \cdot \frac{2500}{1250} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2500}{11000 \cdot 180 \cdot 60} = 0,56 \text{ mm} \quad (5.9)$$

zu berücksichtigen. Im FE-Modell erhöhen sich die Verformungen bei Berücksichtigung der Rippensteifigkeit um 0,6 mm. Der geringe Unterschied zur analytischen Lösung nach Gl. (5.9) ergibt sich aus dem beschriebenen nichtlinearen Verlauf der Normalkräfte und der nicht mehr konstanten Verbindungsmittelbeanspruchung im FE-Modell. Da die Rippensteifigkeit nur einen sehr geringen Einfluss auf das Trag- und Verformungsverhalten der Wandtafel hat, wird sie des Weiteren vernachlässigt und die Rippen werden weiterhin als starr angenommen. Sollen, insbesondere im mehrgeschossigen Bereich, die Verformungen aus der Steifigkeit der Rippen berücksichtigt werden, kann dies über eine Verminderung der Auflagersteifigkeiten geschehen.

Die horizontalen Verformungen des FE-Modells der Wandtafel ist auf diesem Lastniveau größer als in den meisten Wandtafelprüfungen oder in den Arbeiten von Dettmann (2003) oder Kessel/Sandau-Wietfeldt (2005), da die hier verwendete Last-Verformungskurve zur Simulation der Verbindungsmittel bei den auftretenden Verbindungsmittelbeanspruchungen die geringste Steifigkeit aufweist, s. auch Bild 5-1. Andererseits werden die Verformungen infolge der Steifigkeit der Rippen und der Beplankung sowie die plastischen Verformungen einzelner Verbindungsmittel in dem hier vorliegenden FE-Modell vernachlässigt, so dass davon ausgegangen werden kann, dass das reale Verformungsverhalten einer Wandtafel mit Hilfe dieses FE-Modells in guter Näherung abgebildet werden kann.

5.1.5 Berücksichtigung der Auflagersteifigkeiten

Das FE-Modell der Wandtafel ist an den beiden Randrippen vertikal und an der Fußrippe horizontal gelagert. Die horizontale Lagerung der realen Wandtafel erfolgt, wie in Bild 5-2 zu erkennen, durch einen kontinuierlichen Anschluss der Fußrippe mit Hilfe von Passbolzen an die Sohlplatte bzw. mit Schrauben an die Deckenscheibe oder die Kopfrippe der darunter

liegenden Wandtafel. Die Steifigkeiten werden zunächst vernachlässigt und der Anschluss somit als starr angenommen. Der Einfluss der Steifigkeit wird in Kap. 6.5 untersucht.

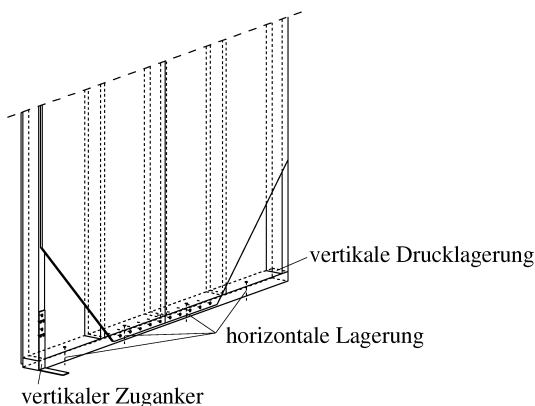


Bild 5-2 : Konstruktion einer Wandtafel im Fußbereich

Vertikale Druckkräfte können von allen Rippen über Kontakt an die Fußrippe und damit an die Unterkonstruktion abgegeben werden. Für die horizontale Beanspruchung in der Ebene der Wandtafel wird, wie beschrieben, idealisiert angenommen, dass nur die Randrippen beansprucht werden. Die vertikalen Druckkräfte infolge der horizontalen Beanspruchung müssen somit über die Kontaktfläche zwischen Randrippe und Fußrippe übertragen werden. Dabei ergeben sich Verformungen infolge der Querdruksteifigkeit der Fußrippe. Obwohl streng genommen erst die Lagerung der Fußrippe auf der Unterkonstruktion als eine Lagerung der Wandtafel bezeichnet werden kann, wird als Lagersteifigkeit des Druckauflagers der Wandtafel die Steifigkeit K_c dieser Kontaktfläche zwischen Randrippe und Fußrippe angenommen. Die auftretenden Verformungen und damit die Größe der Steifigkeit ist von mehreren Parametern, wie den Materialeigenschaften der Fußrippe oder auch geometrischen Randbedingungen, wie dem Fußrippenüberstand, abhängig und kann dadurch sehr variieren. Wie aus dem, in Bild 5-3 dargestellten, Last-Verformungsdiagramm von Holz unter Querdrukbeanspruchung zu erkennen ist, lässt sich das Verformungsverhalten in einen näherungsweise linear-elastischen Bereich und einen nichtlinearen, plastischen Bereich aufteilen. Durch die plastischen Verformungen des Holzes kommt es, wie z. B. von Glos / Henrici / Schmelmer (1987) beschrieben, in Wandtafelversuchen zu Eindrückungen von mehreren Millimetern. Die Bestimmung des Elastizitätsmoduls $E_{c,90}$ nach EN 408:2003 (D) erfolgt mit Hilfe des linear-elastischen Anteils. Die Höchstlast in den Prüfungen zur

Bestimmung der Querdrukfestigkeit nach EN 408:2003 (D) ergibt sich, wenn der Prüfkörper eine bleibende Verformung von $0,01 \cdot h_0$, mit $h_0 = 0,6 \cdot h$, aufweist.

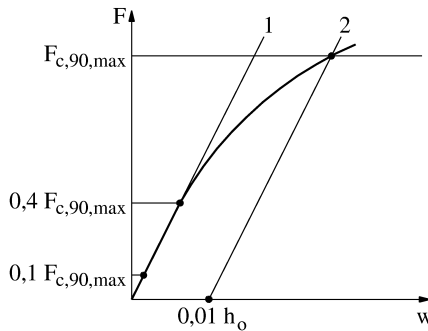


Bild 5-3 : Last-Verformungsdiagramm von Holz bei Druck senkrecht zur Faser (aus EN 408:2003 (D))

Nach Kessel (2004) in den Erläuterungen zur DIN 1052: 2004-08 darf bei Vollauslastung der Kontaktfläche mit einer Verformung von $w_{90,DIN} = 1 \text{ mm}$ gerechnet werden. Für die hier angenommenen Querschnitte und unter Annahme einer durchlaufenden Fußrippe ergibt sich damit eine Steifigkeit

$$\begin{aligned}
 K_{c,DIN} &= \frac{1,2 \cdot k_{c,90} \cdot k_{mod} \cdot f_{c,90,k} \cdot A_{ef}}{\gamma_M \cdot l_{mm}} \\
 &= \frac{1,2 \cdot 1,25 \cdot 0,9 \cdot 2,5 \cdot 180 \cdot (60 + 2 \cdot 30)}{1,3 \cdot 1 \text{ mm}} = 56080 \text{ N/mm.}
 \end{aligned} \tag{5.10}$$

Die Steifigkeit des Druckauflagers kann ebenfalls abgeschätzt werden, indem angenommen wird, dass das Holz der Fußrippe sich entsprechend der Last-Verformungskurve (LVK) nach Bild 5-3 verformt. Im linearen Bereich wird der Elastizitätsmodul für den Nachweis der Tragfähigkeit $E = E_{90,mean} / \gamma_M = 370 / 1,3 = 285 \text{ N/mm}^2$ angesetzt. Damit ergibt sich bei Vollauslastung eine Verformung

$$w_{90,LVK} = \frac{F_c}{E \cdot A} \cdot h_0 + 0,01 \cdot h_0 = \frac{56080}{285 \cdot 180 \cdot 60} \cdot 36 + 0,01 \cdot 36 = 1 \text{ mm.} \tag{5.11}$$

Diese Betrachtung führt somit zu der gleichen Steifigkeit wie nach den Erläuterungen der DIN 1052: 2004-08.

Die ermittelte Steifigkeit kann sich einerseits z. B. infolge von Schlupf, dem Schwinden des Holzes, den zwischen den Geschossen auf Querdruck beanspruchten Deckentafeln oder dem beschriebenen plastischen Verformungsverhalten des Holzes stark verringern. Andererseits werden im mehrgeschossigen Holztafelbau infolge der großen vertikalen Einwirkungen sehr viel steifere und tragfähigere Materialien, wie z. B. eine Fußrippe aus hochkant verleimten Kerto-S-Furnierschichtholzplatten, zum Einsatz kommen und die Konstruktion so gewählt werden, dass möglichst wenig Holz quer zur Faser beansprucht wird, wodurch sich die Steifigkeit des Druckauflagers erhöhen kann.

Wie die Untersuchungen von Kessel / zur Kammer (2004, 2005) gezeigt haben, führt die unterschiedliche Zug- und Drucksteifigkeit der Auflager der Wandtafeln zu einer nichtlinearen Berechnung des Aussteifungssystems. Da zu erwarten ist, dass der Einfluss der Nichtlinearität mit steigendem Unterschied zwischen Zug- und Drucksteifigkeit wächst, wird im Rahmen dieser Arbeit eine sehr große Steifigkeit des Druckauflagers angenommen, die mit Hilfe des Hookeschen Gesetzes abgeschätzt wird. Auf eine Abminderung des Elastizitätsmoduls durch den Teilsicherheitsbeiwert γ_M wird ebenfalls verzichtet. Die Steifigkeit K_c ergibt sich für den hier gewählten Querschnitt der Randrippe somit zu

$$K_c = \frac{F_c}{\Delta b} = \frac{E_{90, \text{mean}} \cdot A}{b_R} = \frac{370 \cdot 180 \cdot 60}{60} = 66600 \text{ N/mm}, \quad (5.12)$$

$$\text{mit } \Delta b = \varepsilon \cdot b_R = \frac{F_c}{E \cdot A} \cdot b_R.$$

Das vertikale Zugauflager der Wandtafel wird mit Hilfe von speziellen Zugankern realisiert. Die Ausführung und damit die Tragfähigkeit und Steifigkeit dieser Konstruktion ist sehr unterschiedlich. Exemplarisch wird hier die Steifigkeit des Bilo-Zugankers der Firma Bierbach mit einer Tragfähigkeit nach DIN 1052-04/88 von $R_{ZA} = 12 \text{ kN}$ ermittelt. Dies entspricht etwa einer Tragfähigkeit von $R_{ZA,d} = 16,8 \text{ kN}$ nach dem neuen Sicherheitskonzept der DIN 1052: 2004-08, was für die Verankerung der hier betrachteten Wandtafel nicht ausreichend wäre. Bei einer praxisgerechten Bemessung des Zugankers würde jedoch das Eigengewicht der Wandtafel und der darüber liegenden Dach- und Deckenkonstruktion berücksichtigt, so dass dieser Zuganker als praxisgerechte Ausführung gesehen werden kann. Die Verformung des Zugankers setzt sich zusammen aus

- den Verformungen der Verbindungsmittel zwischen Zuganker und vertikaler Rippe,
- der Dehnung des Zugankers,
- der Biegung der Fußplatte und
- der Dehnung des Dübels.

Die Steifigkeit eines Verbindungsmittels zwischen Zuganker und vertikaler Rippe ergibt sich gemäß DIN 1052:2004-08 zu

$$K_u = \frac{2}{3} \cdot \frac{p_k^{1.5}}{25} \cdot d^{0.8} = \frac{350^{1.5}}{25} \cdot 4,0^{0.8} = 529 \frac{\text{N}}{\text{mm}}. \quad (5.13)$$

Laut Herstellerangabe von Bierbach wird ein Anker mit 18 Kammnägeln 4,0 x 50 mm an der vertikalen Rippe befestigt. Durch die Parallelschaltung der Verbindungsmittel resultiert die Gesamtfedersteifigkeit der Nagelverbindung

$$K_{\text{Nagelverbindung}} = 18 \cdot 529 = 9432 \frac{\text{N}}{\text{mm}}.$$

Die Steifigkeit des Zugankers lässt sich aus dem Hookeschen Gesetz berechnen:

$$K_{\text{Anker}} = \frac{E \cdot A}{\ell_{\text{Anker}}}, \quad (5.14)$$

mit $E = 210.000 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$, nach DIN 18 800-1 [23], Tabelle 1

$\ell_{\text{Anker}} = 520 \text{ mm}$, (Herstellerangabe Bierbach)

$A = t \cdot (b - 2 \cdot d) = 2,5 \cdot (60 - 2 \cdot 4) = 130 \text{ mm}^2$ (Nettoquerschnitt).

$$\Rightarrow K_{\text{Anker}} = \frac{210.000 \cdot 130}{520} = 52.500 \frac{\text{N}}{\text{mm}}.$$

Für die Verformungsberechnung der Fußplatte wird das in Bild 5-4 skizzierte statische System angenommen.

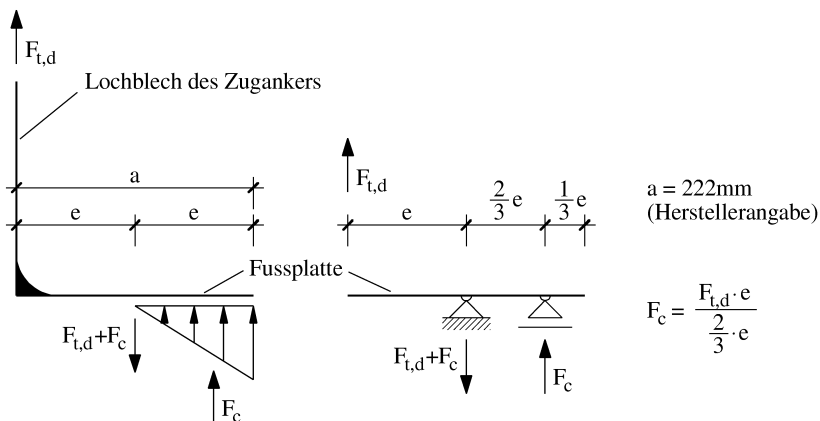


Bild 5-4: Statisches Modell zur Verformungsberechnung der Fußplatte des Zugankers

Die Verformung u_{Platte} des Kragarms an der Stelle der Lasteinleitung durch den Zuganker unter der Zugkraft $F_{t,d}$ errechnet sich somit aus

$$u_{\text{Platte}} = \left(\frac{2 \cdot e^2}{9} + \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{6} \right) \cdot \frac{F \cdot e}{E \cdot I}, \quad (5.15)$$

mit $E = 210.000 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2},$

$$I = \frac{(b-d) \cdot t^3}{12} = \frac{(60-17) \cdot 25^3}{12} = 55989 \text{mm}^4. \quad (\text{Abmessungen Herstellerangaben})$$

Der Bohrlochdurchmesser d für den Dübel M16 beträgt mit Lochspiel 17 mm.

Aus der Verformung am Kragarmende resultiert die Steifigkeit der Fußplatte

$$K_{\text{Fußplatte}} = \frac{F_{t,d}}{u_{\text{Platte}}} = \frac{E \cdot I}{e \cdot \left(\frac{2 \cdot e^2}{9} + \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{6} \right)} = \frac{210000 \cdot 55989}{111 \cdot \left(\frac{2 \cdot 111^2}{9} + \frac{111^2}{2} - \frac{111^2}{6} \right)} = 15475 \frac{\text{N}}{\text{mm}}. \quad (5.16)$$

Die Steifigkeit des Dübels ergibt sich ohne Berücksichtigung der Verbundwirkung des Dübels mit dem Beton aus

$$K_{\text{Dübel}} = \frac{E \cdot A}{\ell} = \frac{210000 \cdot 201}{190} = 222158 \frac{\text{N}}{\text{mm}}, \quad (5.17)$$

mit $A = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = \frac{\pi \cdot 16^2}{4} = 201 \text{mm}^2$ (Querschnitt des Dübels).

Die Gesamtfedersteifigkeit K_t des Zugankers folgt aus der Reihenschaltung der 4 Steifigkeiten

$$\frac{1}{K_{t,\text{Gesamt}}} = \frac{1}{K_{\text{Nagelverbindung}}} + \frac{1}{K_{\text{Anker}}} + \frac{1}{K_{\text{Fußplatte}}} + \frac{1}{K_{\text{Dübel}}} \quad (5.18)$$

$$\Rightarrow K_{t,\text{Gesamt}} = \frac{1}{\frac{1}{9432} + \frac{1}{52500} + \frac{1}{15475} + \frac{1}{222158}} = 5150 \frac{\text{N}}{\text{mm}}, \text{ gew. } 5000 \text{ N/mm}. \quad (5.19)$$

Die Praxis zeigt, dass bei der Ausführung der Zuganschlüsse oftmals nicht die Angaben des Herstellers oder des Tragwerksplaners berücksichtigt werden. Der Zuganker wird nicht vollständig ausgegallt oder/und nicht direkt an die vertikale Rippe, sondern über die dazwischen liegende Beplankung angeschlossen. Die Steifigkeit des Zuganschlusses wird dadurch extrem verringert. So verringert sich die Steifigkeit eines Nagels nach Blaß / Laskewitz (2000) um etwa 35 %, wenn eine OSB-Platte zwischen Zuganker und Rippe

angeordnet ist. Für die hier zu führenden Untersuchungen von Wandtafeln mit Geschosshöhe wird vereinfachend eine Steifigkeit des Zugaufagers $K_t = 5000 \text{ N/mm}$ angenommen, wenn der Fall einer realistischen Auflagersteifigkeit untersucht wird. Für Untersuchungen im mehrgeschossigen Bereich halbiert sich diese Steifigkeit, da der gleiche Anschluss noch einmal an der vertikalen Rippe der darunter liegenden Wandtafel vorhanden ist.

Ein zu betrachtender Grenzfall ist das Fehlen der Zugverankerung. Die Wandtafel ist unter horizontaler Einwirkung dann labil. Durch vertikale Druckkräfte oder durch räumliche Anordnung mehrerer Wandtafeln kann ein stabiles Tragverhalten erreicht werden, so dass die Wandtafel auch ohne Zugverankerung horizontale Einwirkungen abtragen kann. Bei der Betrachtung dieses Grenzfalles wird die Steifigkeit $K_t = 0 \text{ N/mm}$ gesetzt.

Die Steifigkeit der Auflager wird im FE-Modell der Wandtafel berücksichtigt, indem unter jeder vertikalen Rippe ein zusätzlicher Auflagerknoten eingeführt wird, der über zwei Federelemente **combin39** in z-Richtung mit dem unteren Knotenpunkt der vertikalen Rippe verbunden ist. Die Federelemente **combin39** haben die Eigenschaft, dass ihnen eine reine Druck- bzw. Zugsteifigkeit zugeordnet werden kann. So wird erreicht, dass in Abhängigkeit des Vorzeichens der Auflagerkraft nur jeweils eine Feder mit der entsprechenden Steifigkeit aktiviert wird. Den Federelementen werden lineare Eigenschaften zugeordnet. Bei Berücksichtigung der in den Gln. (5.12) und (5.19) ermittelten Steifigkeiten im FE-Modell der Wandtafel kommt es zu einer horizontalen Verformung $v = 13,23 \text{ mm}$. Die Verformungen erhöhen sich damit bei Berücksichtigung der Steifigkeiten um $8,61 \text{ mm}$. Nach Kessel / Schönhoff (2001/1) und Kessel (2003/1) sind die Verformungen analytisch zu bestimmen aus

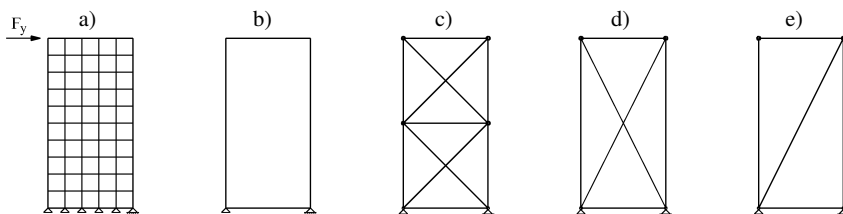
$$v_c = \frac{F_y \cdot H}{\ell} \cdot \frac{H}{\ell} \cdot \left(\frac{1}{K_t} + \frac{1}{K_c} \right) = \frac{10000 \cdot 2500}{1250} \cdot \frac{2500}{1250} \cdot \left(\frac{1}{5000} + \frac{1}{66600} \right) = 8,60 \text{ mm}. \quad (5.20)$$

Der Verlauf der Normalkräfte in den Rippen und der Schubspannungen in der Beplankung wird durch die Berücksichtigung der Auflagersteifigkeiten nicht beeinflusst.

5.2 Vereinfachtes FE-Modell einer Wandtafel

In Kap. 4 und 5.1 ist das Trag- und Verformungsverhalten einer Wandtafel analysiert und ein FE-Modell zur Beschreibung dieses Verhaltens vorgestellt worden. Um das räumliche Zusammenwirken mehrerer Wandtafeln innerhalb eines Aussteifungssystems zu untersuchen, erscheint dieses FE-Modell zu aufwendig. Daher soll hier ein möglichst einfaches FE-Modell

entwickelt werden, dass das Verformungsverhalten der Wandtafel in guter Näherung abbildet. Das zu entwickelnde Modell soll im Rahmen dieser Arbeit wissenschaftlichen Zwecken dienen, aber auch gegebenenfalls später in der Praxis anwendbar sein. Für die Anwendung in der Praxis müssen nach einer möglichst einfachen Modellierung, in der die entscheidenden Steifigkeitsparameter der Wandtafel und ihrer Verbindung zu den angrenzenden Bauteilen leicht zu berücksichtigen sind, die bemessungsrelevanten Ergebnisse direkt ablesbar oder mit Hilfe einer kurzen Nachlaufrechnung zu ermitteln sein. Als Ersatzsystem für das aufwendige FE-Modell einer Wandtafel stehen mehrere Modelle zur Auswahl, die in Bild 5-5 dargestellt sind.



a) FE-Modell Scheibenelemente, feine Diskretisierung ; b) ein Scheibenelement ; c) Hrennikoff-Modell ; d) Fachwerk, zwei Diagonalen ; e) Fachwerk, eine Diagonale

Bild 5-5 : Mögliche Modelle zur Simulation einer Wandtafel

Zur einfachen Simulation einer Wandtafel wird in wissenschaftlichen Abhandlungen und auch in der Praxis oftmals ein Fachwerkmodell als Ersatzsystem verwendet. So stellen zum Beispiel Kessel / Schönhoff (2001/1) das in Bild 5-5e dargestellte Modell vor. Die Normalkräfte der Randrippen sind dabei direkt aus dem Ersatzsystem ablesbar. Der für die Bemessung der Verbindungsmittel wichtige Schubfluss ergibt sich mit Hilfe einer kurzen Nachlaufrechnung aus der Normalkraft der Diagonalen. Kessel / Dettmann (2000/1) verwenden das in Bild 5-5d dargestellte innerlich statisch unbestimmte Fachwerkmodell.

Auch zur Simulation des eingespannten Stabes unter Biege- und Torsionsbeanspruchung stehen mehrere Möglichkeiten zur Verfügung. Für klassische Ingenieur Anwendungen wird der Stab auf seine Achse reduziert und mit Hilfe von Balkenelementen, für die entsprechende Querschnittswerte definiert werden, simuliert. Wesentlich anschaulichere Ergebnisse liefert die Simulation mit Hilfe von Scheiben- bzw. Schalenelementen. In Bild 5-5a ist das Modell eines eingespannten Stabes mit Hilfe von Scheibenelementen dargestellt. Am Fußpunkt des „Stabes“ ist dabei jeder Knotenpunkt der einzelnen Scheibenelemente in Richtung der

Stabachse gelagert. Bei Verwendung der unten beschriebenen Elemente nähern sich, bei feiner werdender Diskretisierung und ausreichend langem Stab, die Ergebnisse der Simulation an die analytische Lösung des Bernoullistabes an. Die Schubspannungsverteilung nähert sich der parabelförmigen Verteilung an, wobei die Schubspannungen in den einzelnen finiten Elementen konstant sind. Bei kürzeren Stäben haben auch bei Annahme eines linear elastischen, homogenen und isotropen Materials die Schubverformungen einen nicht mehr zu vernachlässigenden Einfluss. Eine analytische Beschreibung ist dann mit Hilfe des Timoshenko-Balkens möglich.

Auch die Simulation der Wandtafel ist mit Hilfe von Scheibenelementen möglich. Allerdings erscheint das Modell mit feiner Diskretisierung der Scheibenelemente zu aufwendig. Es ist ausreichend, die Wandtafel mit nur einem Scheibenelement, wie in Bild 5-5b dargestellt, zu simulieren. Die Schubspannungen des Elements sind, wie beschrieben, konstant und entsprechen dem Schubfluss der Wandtafeln. Da die Lagerungen des Scheibenelements an den Ecken denen der Wandtafel entsprechen, sind die vertikalen Auflagerreaktionen und damit die Normalkräfte der Wandtafel leicht ablesbar. Die horizontale Verformung der Wandtafel kann über die Schubsteifigkeit des Scheibenelements gesteuert werden.

Hrennikof (1940) und Spierig (1963) berechnen Scheiben-, Platten- und Schalenprobleme mit Hilfe von Fachwerkmodellen. Diese Modelle sind nur für isotrope Materialien anwendbar. Wie in Bild 5-5c dargestellt, kommt es schon bei den relativ kleinen Abmessungen einer Wandtafel zu einer relativ großen Anzahl Stäbe, deren Querschnittswerte durch Vorlaufrechnungen ermittelt werden müssen.

Im Rahmen dieser Arbeit wird mit Hilfe des in Bild 5-5b und Bild 5-6 dargestellten Modells gearbeitet. Um die räumliche Anordnung der Elemente zu erleichtern, wird mit Hilfe eines Schalenelements gearbeitet, dem reine Membraneigenschaften zugeordnet werden, so dass das Tragverhalten dem eines Scheibenelements entspricht. Das verwendete Schalenelement **SHELL 63** aus der ANSYS-Elementbibliothek ist ein 4-Knotenelement mit linearen Ansatzfunktionen, das in jedem Knoten 6 Freiheitsgrade besitzt. Obwohl für die Simulation also streng genommen mit einem Schalenelement gearbeitet wird, soll weiterhin von einem Scheibenelement gesprochen werden, da dies auch dem Tragverhalten der Wandtafel und des verwendeten Elements entspricht. Um die räumlichen Lagerungsbedingungen des Scheibenelements zu erfüllen, muss das Element, wie in Bild 5-6 dargestellt, in den vier Eckpunkten senkrecht zu seiner Scheibenebene gelagert werden. Die vereinfachte Simulation der Wandtafel mit nur einem Element wird des Weiteren als Ein-Element-Tafel bezeichnet.

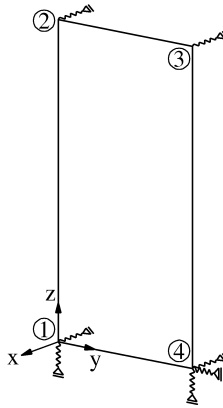


Bild 5-6 : Ein-Element-Tafel mit räumlicher Lagerung

Die Materialeigenschaften der Ein-Element-Tafel ergeben sich aus dem Tragverhalten und den Materialeigenschaften der Wandtafel. Wie in Kap. 4 und 5.1 beschrieben, resultiert die maßgeblichen Verformung einer Wandtafel infolge von Schubverformungen, während die Biegeverformungen vernachlässigt werden können. Aufgrund der nicht vorhandenen Biegeverformungen der Wandtafel wird der Elastizitätsmodul der Ein-Element-Tafel mit $E = \infty$ angenommen. Der Schubmodul G der Ein-Element-Tafel lässt sich nach Kessel / Schönhoff (2001/1) ermitteln und ergibt sich für das oben behandelte Beispiel bei einer Scheibendicke $t = 1\text{ mm}$ zu

$$G = \frac{1}{\frac{2 \cdot a_v}{C_F} \cdot \left(\frac{1}{\ell} + \frac{1}{H} \right)} = \frac{1}{\frac{2 \cdot 62,5}{650} \cdot \left(\frac{1}{1250} + \frac{1}{2500} \right)} = 4333 \text{ N/mm}^2. \quad (5.21)$$

Die Ergebnisse der Ein-Element-Tafel sind leicht nachvollziehbar. Die Schubspannung τ_{yz} lässt sich ermitteln aus

$$\tau_{yz} = \frac{V_y}{A} = \frac{10000}{1250} = 8 \text{ N/mm}^2 \quad (5.22)$$

und entspricht bei der hier gewählten Elementdicke $t = 1 \text{ mm}$ dem Schubfluss der Wandtafel nach Gl. (5.6).

Die Federbeanspruchung F_F ergibt sich somit mit Hilfe von Gl. (5.7).

Die Verformung der Ein-Element-Tafel in Bild 5-7 entspricht der Verformung der Wandtafel nach Gl. (5.1). Sie ist mit Hilfe des Arbeitssatzes zu ermitteln:

$$v = \frac{V_y \cdot \overline{V_y}}{A \cdot G} \cdot H = \frac{10000 \cdot \bar{1}}{1250 \cdot 4333} \cdot 2500 = 4,62 \text{ mm.} \quad (5.23)$$

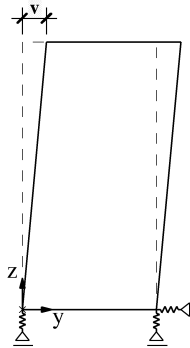


Bild 5-7: Horizontale Verformung der Ein-Element-Tafel mit starren Auflagern

Die Steifigkeit der Auflager wird wie bei der Wandtafel in Kap. 5.1 berücksichtigt, indem zwei zusätzliche Lagerknoten eingeführt werden, die mit den Ecken des Scheibenelements über Federn verbunden sind. Die Berücksichtigung der Steifigkeiten bei der Ein-Element-Tafel führt zu den gleichen Ergebnissen wie im genaueren FE-Modell der Wandtafel. Die Verformungen infolge der Auflagersteifigkeit sind mit Hilfe von Gl. (5.20) zu ermitteln.

6 Räumliche Anordnung der einfachen Wandtafel

6.1 Allgemeines

6.1.1 Konstruktion

In einem realen System sind die einzelnen Wandtafeln an ihren vertikalen Berührungskanten direkt und über die Deckentafel indirekt miteinander verbunden. Wie in Kap. 2 beschrieben, wird im Rahmen dieser Arbeit die Biegesteifigkeit der Deckentafel vernachlässigt und die Deckentafel als starre Scheibe angenommen. Auch die Steifigkeit der horizontalen Verbindung zwischen Wandtafel und Deckentafel wird vernachlässigt. Die Wandtafeln sind damit in horizontaler Richtung starr miteinander verbunden. In vertikaler Richtung wirkende Kräfte können über die Deckentafel nicht von einer zur anderen Wandtafel übertragen werden. Durch die beliebige, aber hier vereinfachend orthogonale, Anordnung der Wandtafeln im Grundriss kommt es zu Wandtafelstellungen, die z.B. L-, U- und T-Form haben. Die Wandtafeln in solchen Wandtafelstellungen sind in der Realität auf unterschiedlichste Weise miteinander verbunden. Die Verbindung wird teilweise statisch berücksichtigt oder sie erfolgt nur konstruktiv. Neben der, in Bild 6-1 dargestellten, oft ausgeführten Überblattung der Kopfrippen werden die vertikalen Rippen der Wandtafeln z. B. durch Schrauben verbunden. Dadurch entsteht eine Verbindung, die vertikale und horizontale Kräfte zwischen den senkrecht zueinander stehenden Wandtafeln übertragen kann. Auch wenn die Verbindung nur konstruktiven Zwecken dient, sind mehrere Schrauben über die Höhe der Wandtafeln verteilt. Statisch berücksichtigt wird die Verbindung, wenn, wie in Bild 6-1 angedeutet, z. B. in der Ecke einer L-Stellung auf eine Zugverankerung verzichtet werden soll und die „unverankerte“ Wandtafel über die Verbindung die Zugverankerung der senkrecht stehenden Wandtafel aktivieren muss. Oder, wenn umgekehrt das Eigengewicht der senkrecht stehenden Wandtafel bei der Bemessung der Zugverankerung berücksichtigt werden soll. Die Verbindung wird dann, insbesondere im mehrgeschossigen Holztafelbau, mit wesentlich mehr Schrauben ausgeführt. Die Steifigkeit der Verbindung kann durch schräg eingeschraubte Schrauben, wie in Bild 6-1 zu erkennen ist, wesentlich erhöht werden. Blaß / Bejtka (2003) und Ranta-Maunus (2002) geben für eine Verbindung mit schrägen Schrauben eine bis zu 15fach höhere Steifigkeit an.

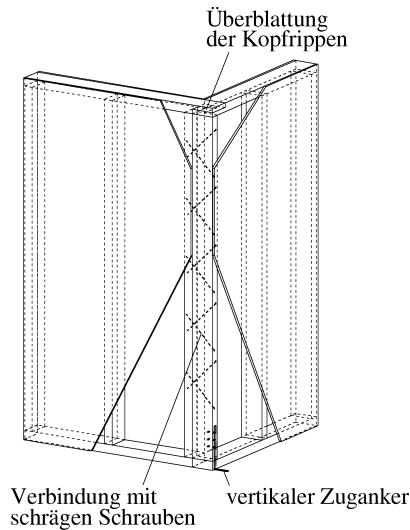


Bild 6-1 : Verbindung zweier Wandtafeln in L-Stellung

6.1.2 FE-Modellierung

Das Tragverhalten einer Wandtafel kann mit der in Kap. 5.2 vorgestellten Ein-Element-Tafel mit ausreichender Genauigkeit beschrieben werden. Um die Ein-Element-Tafel auch für die räumliche Anordnung der Wandtafeln anwenden zu können, muss überprüft werden, ob es durch die räumliche Anordnung zu Beanspruchungen der Wandtafel kommt, die nicht durch die Ein-Element-Tafel abgebildet werden können. Dazu wird das Tragverhalten zweier Wandtafeln in L-Stellung betrachtet, die an ihren Berührungskanten starr miteinander verbunden sind. Die Wandtafeln werden einmal mit Hilfe des in Kap. 5.1 vorgestellten genaueren FE-Modells und einmal mit Hilfe der Ein-Element-Tafel simuliert. Die Steifigkeiten der Auflager werden mit den Steifigkeiten nach Gln. (5.12) und (5.19) berücksichtigt. Im genaueren FE-Modell werden die beiden Randrippen an der Berührungskante der Wandtafeln mit Hilfe von kontinuierlich über die Länge verteilten starren Federn in allen drei Verschiebungsrichtungen miteinander verbunden. Die Ein-Element-Tafeln werden an den Eckpunkten verbunden. Die horizontale Einwirkung entspricht der bei Betrachtung einer einzelnen Wandtafel.

Infolge der horizontalen Einwirkung kommt es im genaueren FE-Modell zu den in Bild 6-2 dargestellten Normalkräften. Es zeigt sich, dass die Randrippe der belasteten Wandtafel über

die starre Verbindung in der Berührungskante die Hälfte der Normalkräfte an die Randrippe der Querwand abgibt. Die Auflagerkraft der belasteten Wandtafel halbiert sich dadurch im Vergleich zu der einfachen Wandtafel. Die Normalkraft der Randrippe der Querwand wird direkt an das Auflager abgegeben. Es kommt zu keinen Beanspruchungen der Verbindungsmittel zwischen Rippe und Beplankung und damit auch zu keiner Schubbeanspruchung der Beplankung. Infolge der vertikalen Verformungen der Auflager in der Ecke der L-Stellung kommt es nicht nur zu Verformungen der Wandtafeln in Richtung der Einwirkungen, sondern auch zu horizontalen Verformungen quer zur Einwirkungsrichtung, wie später in Bild 6-6 näher beschrieben wird.

Durch den Abstand der Schwerachsen der beiden Randrippen in der Ecke der L-Stellung kommt es zu einem Exzentrizitätsmoment, das gegebenenfalls bei der Bemessung der Wandtafeln berücksichtigt werden muss. Auf das Gesamttragverhalten der Wandtafel hat dieses Moment einen vernachlässigbaren Einfluss.

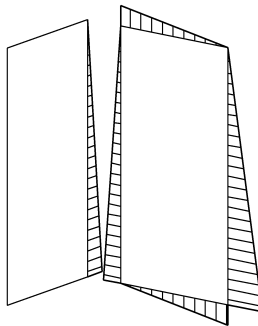


Bild 6-2 : Normalkräfte des genaueren FE-Modells zweier Wandtafeln in L-Stellung

Das Trag- und Verformungsverhalten der mit Hilfe der Ein-Element-Tafel simulierten Wandtafeln entspricht dem des genaueren FE-Modells. Durch die räumliche Anordnung der Wandtafeln kommt es zu keinen Beanspruchungen, die eine Modellierung mit Hilfe des genaueren FE-Modells erforderlich machen. Die Modellierung der Wandtafeln erfolgt daher im weiteren Verlauf der Arbeit mit der vorgestellten Ein-Element-Tafel.

Wie in Kap. 6.1.1 beschrieben, sind die Wandtafeln direkt in ihren Berührungskanten und indirekt über die Deckentafeln miteinander verbunden. In Bild 6-3 sind exemplarisch zwei Wandtafeln in L-Stellung mit darüber liegender Deckentafel und ihre Verbindungen

untereinander dargestellt. Die direkte Verbindung der Wandtafeln in vertikaler Richtung erfolgt über zwei lineare Federelemente **combin14** (Knoten 1 mit 101 und 2 mit 102). Die Steifigkeit der Verbindung kann, wie beschrieben, sehr unterschiedlich sein. Im Rahmen dieser Arbeit werden 4 Fälle betrachtet:

- Keine Verbindung,
- Verbindung mit geringer Steifigkeit: „Konstruktive“ Verbindung der Wandtafeln mit 4 Schrauben, $d = 6\text{ mm}$, Tragfähigkeit der Verbindung ca. 2800 N,
- Verbindung mit hoher Steifigkeit: Statisch wirksame Verbindung der Wandtafeln mit 8 Vollgewindeschrauben unter einem Winkel von 45° , $d = 6\text{ mm}$, Tragfähigkeit der Verbindung ca. 25400 N,
- starre Verbindung.

Für den Fall ohne Verbindung wird die Steifigkeit C_{VV} der Federelemente mit $C_{VV,0} = 0\text{ N/mm}$, für die starre Verbindung mit $C_{VV,\text{starr}} = 999999\text{ N/mm}$ angesetzt. Im Fall der konstruktiven Verbindung ergibt sich die Steifigkeit $C_{VV,\text{konstr}}$ der Federelemente aus der halben Steifigkeit der Verbindung $K_{VV,\text{konstr}}$. Die Steifigkeit der Schrauben wird mit Hilfe des Verschiebungsmoduls K_{ser} nach DIN 1052: 2004-8 abgeschätzt. Für eine Verbindung in der Berührungskante mit 4 Schrauben $d = 6\text{ mm}$ ergibt sich $C_{VV,\text{konstr}}$ eines Federelements zu

$$C_{VV,\text{konstr}} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot K_u = 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot K_{\text{ser}} = \frac{4}{3} \cdot \frac{p_k^{1,5}}{25} \cdot d^{0,8} = \frac{4}{3} \cdot \frac{350^{1,5}}{25} \cdot 6,0^{0,8} \quad (6.1)$$

$$= 1464\text{ N/mm}.$$

Für die Verbindung mit hoher Steifigkeit wird eine Verbindung der Wandtafeln mit 8 Schrägschrauben, $d = 6\text{ mm}$ angenommen. Die Steifigkeit wird nach Ranta-Maunus (2002) mit dem 15fachen Wert der Steifigkeit einer Schraube auf Abscheren nach DIN 1052: 2004-08 abgeschätzt. Die Steifigkeit $C_{F,\text{stat}}$ der Federelemente ergibt sich damit für die Verbindung mit hoher Steifigkeit zu

$$C_{VV,\text{stat}} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 15 \cdot K_u = 60 \cdot \frac{2}{3} \cdot K_{\text{ser}} = 40 \cdot \frac{p_k^{1,5}}{25} \cdot d^{0,8} = 40 \cdot \frac{350^{1,5}}{25} \cdot 6,0^{0,8} \quad (6.2)$$

$$= 43928\text{ N/mm}.$$

Die Simulation der Deckentafel erfolgt wie bei den Wandtafeln mit Hilfe des Elements **shell63** mit einer Dicke $t = 1\text{ mm}$. Dem Element werden reine Membraneigenschaften zugeordnet. Die Materialeigenschaften werden als starr angenommen. Die oberen Knoten der Ein-Element-Tafel sind, wie im Detail A in Bild 6-3 verdeutlicht, in den beiden horizontalen Verschiebungsrichtungen über Federelemente **combin14** mit einer Steifigkeit $C_{HV} = 999999\text{ N/mm}$ mit der Deckentafel verbunden (Punkte 3 mit 203 usw.). Zur Simulation

der indirekten horizontalen Verbindung über die Deckentafel des darunter liegenden Geschosses bzw. der Sohlplatte werden die Wandtafeln, wie im Detail B in Bild 6-3 zu erkennen, an den Fußpunkten (Punkte 1 und 101) über Federelemente **combin14** mit einer Steifigkeit $C_{HV} = 999999 \text{ N/mm}$ verbunden.

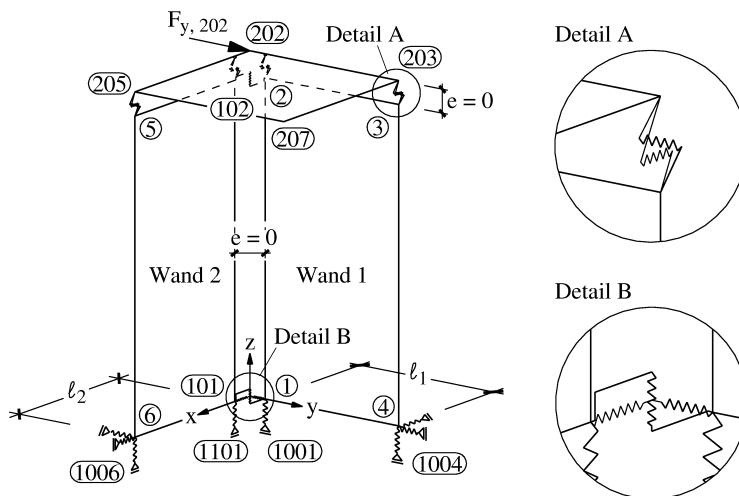


Bild 6-3: Verbindungselemente und Knotenbezeichnungen einer L-Stellung zweier Wandtafeln

Zur Erfüllung der räumlichen Lagerungsbedingungen benötigt die einzelne Wandtafel in Bild 5-6 vier Lagerungen senkrecht zu ihrer Scheibenebene. Gleiches gilt für die zweite Wandtafel der L-Stellung. Durch die direkte Verbindung am Fußpunkt der beiden Wände kann jeweils auf die unteren Lagerungen in der Ecke der L-Stellung verzichtet werden. Außerdem kann wegen der indirekten Verbindung über die Deckenscheibe auf die oberen Verbindungen in der Ecke der L-Stellung und eine weitere Lagerung in den Punkten 3 oder 5 verzichtet werden. Es verbleibt eine Lagerung senkrecht zur jeweiligen Ebene im Punkt 3 oder 5. Um für die Untersuchungen des räumlichen Tragverhaltens die freie, räumliche Verformbarkeit der L-Stellung zu gewährleisten, soll auf dieses Auflager verzichtet werden. Daher werden bei der L-Stellung den Schalenelementen nicht, wie in Kap. 5.2 beschrieben, reine Membraneigenschaften zugeordnet, sondern die Biege- und Membraneigenschaft des Elements beibehalten. Auftretende Torsionsbeanspruchungen trägt dieser L-Querschnitt über St-Venantsche Torsion ab, da es sich um einen annähernd wölbfreien Querschnitt handelt. Die

St-Venantsche-Torsionssteifigkeit ist allerdings durch die Querschnittsdicke der Schalenelemente von einem Millimeter sehr gering. Da die horizontale Einwirkung im Schubmittelpunkt des L-Querschnitts angreift, kommt es zu keinen planmäßigen Torsionsbeanspruchungen, so dass die Annahme von Schalenelementen keinen Einfluss auf das Tragverhalten der L-Stellung hat.

Im Folgenden werden Wandtafeln in L-, U- und U+1-Stellungen mit starrer und steifer Lagerung und den beschriebenen unterschiedlich steifen direkten Verbindungen untersucht. Um den Vergleich mit der einzelnen Wandtafel herstellen zu können, bleibt die horizontale Einwirkung $F_y = 10000 \text{ N}$ dabei immer im Punkt 202.

6.2 Wandtafeln ohne Verbindung in den Berührungskanten

Sind die Wandtafeln in ihren Berührungskanten nicht verbunden, kommt es unter der gegebenen Einwirkung bei der L-, U- und U+1-Stellung mit starrer oder steifer Lagerung nur zu Beanspruchungen der Wand 1. Die Querwände bleiben unbeansprucht. Die Ergebnisse der FE-Analyse können auch mit Hilfe der Verfahren im Holztafelbau nach Kap 4.3 ermittelt werden.

Horizontale Verformungen stellen sich nur in Richtung der Einwirkung ein und entsprechen denen der einzelnen Wandtafel.

6.3 Wandtafeln mit starrer Verbindung in den Berührungskanten

6.3.1 Wandtafeln in L-Stellung

In Bild 6-4 ist die Verformungsfigur von zwei Wandtafeln in L-Stellung unter einer horizontalen Einwirkung $F_y = 10000 \text{ N}$ im Punkt 202 dargestellt. Die Wandtafeln sind starr gelagert und starr in vertikaler Richtung an ihrer Berührungskante miteinander verbunden.

Da der Elastizitätsmodul sowie alle Verbindungen und Lagerungen starr sind, hat die Querwand (Wand 2) keinen Einfluss auf das Trag- und Verformungsverhalten der Wand 1. Die Verformungen der Wand 1 entsprechen denen der einfachen Wandtafel nach Bild 5-7 und Gl. (5.23). Die Kopfverformung der Wand 1 wird Wand 2 über die Deckentafel aufgezungen. Die Schubspannungen der Wand 1 entsprechen ebenfalls denen der einfachen Wandtafel nach Gl. (5.22). Wand 2 bleibt unbeansprucht.

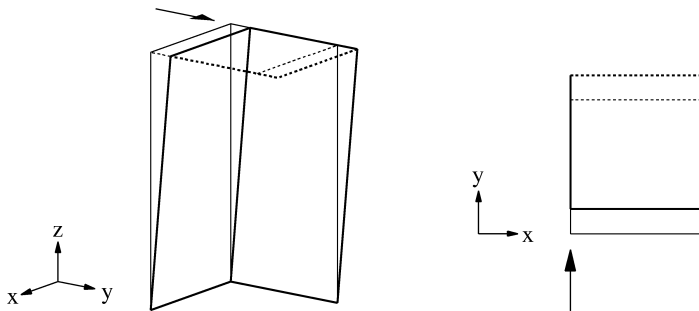


Bild 6-4: Isometrie und Draufsicht der Verformungsfigur der Wandtafeln in L-Stellung mit Deckentafel; starre Auflager und Verbindungen

In Bild 6-6 ist die Verformungsfigur der zwei Wandtafeln in L-Stellung unter Berücksichtigung der Steifigkeit der Auflager dargestellt. Die Steifigkeiten der Auflager entsprechen denen in den Gln. (5.12) und (5.19) ermittelten Steifigkeiten. Die vertikale Verbindung der Wandtafeln untereinander bleibt starr.

Die Auflagerreaktionen können über die Gleichgewichtsbedingungen ermittelt werden. Aus dem Gleichgewicht um die y -Achse ergibt sich, dass das Auflager im Punkt 1006 nicht beansprucht wird. Das Auflager im Punkt 1101 nimmt die Kraft F_v auf, die von der vertikalen Verbindung der Wandtafeln übertragen werden, wie in Bild 6-5 zu erkennen. Da die vertikale Verbindung der Wandtafeln als starr angenommen wurde und beide Zugverankerungen die gleiche Steifigkeit besitzen, wird die Zugverankerung der Wand 2 im Punkt 1101 in gleicher Größe beansprucht wie die Zugverankerung der Wand 1 im Punkt 1001. Die Beanspruchung der Zugverankerung wird somit gegenüber der einzelnen Wandtafel halbiert. Die Schubspannungen von Wand 1 entsprechen weiterhin denen der einfachen Wandtafel. Wand 2 bleibt, wie auch das Gleichgewicht in Bild 6-5 zeigt, weiterhin unbeanspruch.

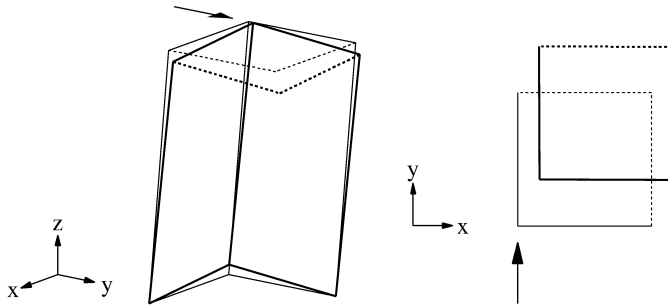


Bild 6-6: Isometrie und Draufsicht der Verformungsfigur der Wandtafel in L-Stellung mit Deckentafel; steife Auflager und starre Verbindungen

Das Tragverhalten der Wandtafeln in L-Stellung ist vergleichbar mit dem Tragverhalten eines Stabes mit L-Querschnitt. Beim Stab kommt es aufgrund des gedrehten Hauptachsensystems zu Verformungen senkrecht zur horizontalen Einwirkung. In Kap. 7 wird darauf weiter eingegangen und das Tragverhalten der Wandtafeln mit Hilfe der Biegetheorie des Stabes beschrieben.

6.3.2 Wandtafeln in U-Stellung

Die L-Stellung der beiden Wandtafeln wird durch die in x-Richtung verlaufende Wand 3 ergänzt und entsprechend mit der Wand 1 und der Deckenscheibe verbunden, so dass sich ein U ergibt. Die horizontale Einwirkung $F_{y, 202}$ bleibt erhalten.

Wie in Bild 6-7a zu erkennen, haben bei starrer Lagerung die beiden quer stehenden Wände 2 und 3, wie schon bei der L-Stellung, keinen Einfluss auf das Verformungsverhalten der Wand 1. Die Verformungen entsprechen denen der einfachen Wandtafel und die beiden Querwände bleiben unbeansprucht.

Auch bei Berücksichtigung der Auflagersteifigkeiten kommt es, wie Bild 6-7b verdeutlicht, zu einem Tragverhalten, das mit dem der L-Stellung vergleichbar ist. Die Querwand an der Zugseite (Wand 2) der Wand 1 verformt sich auf Grund der Verformungen w_{101} des Zugauflagers in positiver x-Koordinatenrichtung. Auf der Druckseite der belasteten Wandtafel verformt sich die Querwand (Wand 3) auf Grund der Verformungen w_{104} des Druckauflagers in negativer x-Koordinatenrichtung. Diese Verformung ist wesentlich geringer, weil die Steifigkeit des Druckauflagers wesentlich größer ist als die des

Zugauflegers. Durch die gegensätzliche Verformung der Querwände infolge der Auflagerverformungen kommt es zu einer Verdrehung der Deckenscheibe um die vertikale z-Achse, wie sie bei einem Stabquerschnitt infolge einer Torsionsbeanspruchung auftritt. Gegenüber der L-Stellung verringern sich die Verformungen $v_2 = 8,92$ mm geringfügig, da auf der Druckseite der Wand 1 das Druckauflager der Wand 3 aktiviert wird. Die Wand 3 verformt sich infolge der Auflagerverformung w_{104} um $u_{103} = -0,3$ mm. Die Verformungen der Wand 2 bleiben gegenüber der L-Stellung unverändert. Trotz der beschriebenen Verformungen bleiben die Querwände, wie aus den Gleichgewichtsbedingungen zu ermitteln, unbeansprucht. Die Schubspannung der Wand 1 entspricht weiterhin der einer einfachen Wandtafel.

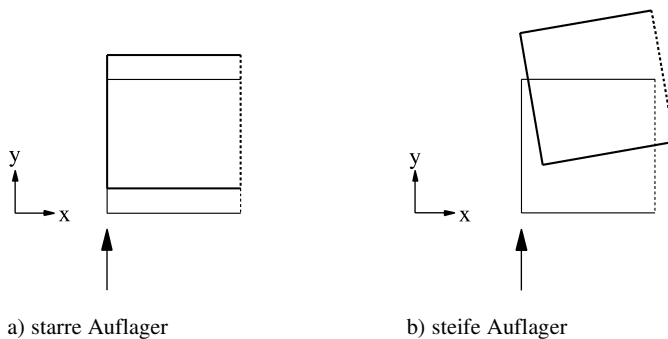


Bild 6-7 : Verformungsfigur der Wandtafeln in U-Stellung in der Draufsicht; starre vertikale Verbindung untereinander

Das Tragverhalten der U-Stellung der Wandtafeln wird in Kap. 7 mit Hilfe der Biege- und Torsionstheorie des Stabes beschrieben.

6.3.3 Wandtafeln in U+1-Stellung

Die drei Wandtafeln in U-Stellung werden, wie in Bild 6-8 dargestellt, durch die Wand 4 ergänzt, die in Verlängerung der Wand 2 an der Zugseite der Wand 1 angeordnet ist. Die Wand 4 hat einen Abstand $\ell_A = 1250$ mm zur Wand 2 und ist über die Deckentafel horizontal mit den restlichen Wandtafeln verbunden.

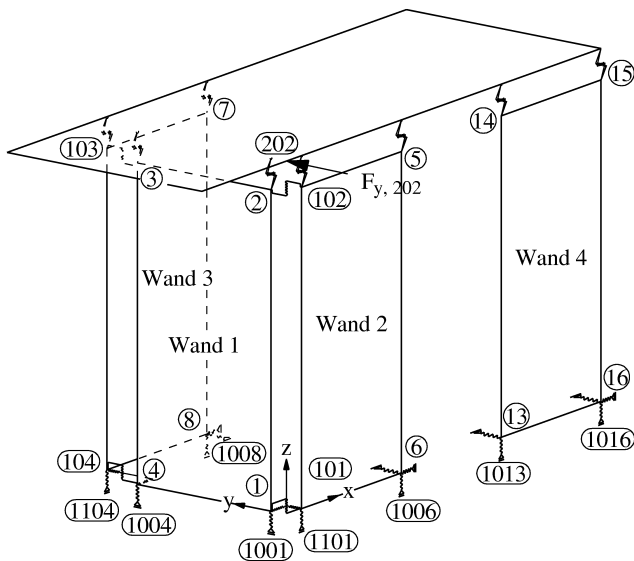


Bild 6-8 : Verbindungen und Knotenbezeichnungen Wandstellung U+1

Bei starrer Lagerung der Wandtafeln hat die vierte Wand unter der gegebenen Einwirkung keinen Einfluss auf das Gesamttragverhalten der Wandtafeln. Die Verformungen und Auflagereaktionen sind gleich denen der U-Stellung. Die Wand 4 bleibt unbeansprucht und verformt sich, wie in Bild 6-9a zu erkennen, entsprechend der Verformung der Wand 1 nur senkrecht zu ihrer Ebene. Da bei starrer Lagerung der Wandtafeln die Verbindung der Wände keinen Einfluss auf das Tragverhalten hat, kann das System mit Hilfe des in Kap. 4.3 vorgestellten Verfahrens analysiert werden, indem 4 einzelne Wände betrachtet werden.

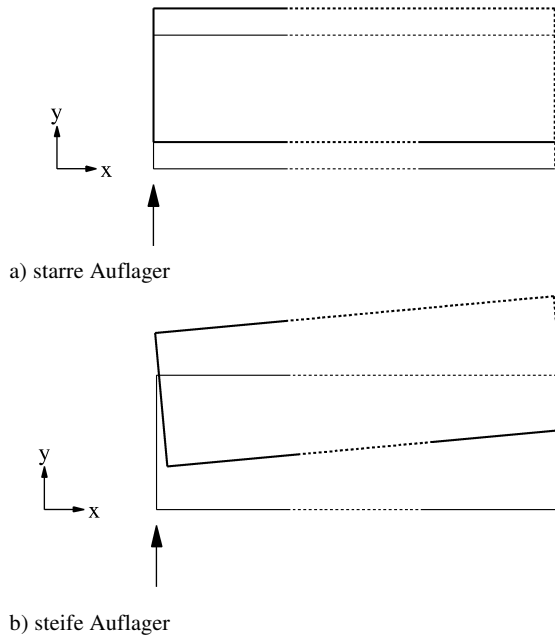


Bild 6-9 : Verformungsfigur der Wandtafeln in U+1-Stellung in der Draufsicht; starre vertikale Verbindung in der U-Stellung

Bei Berücksichtigung der Auflagersteifigkeiten kommt es, wie in Bild 6-9b dargestellt und bei der Betrachtung der U-Stellung bereits beschrieben, infolge der Auflagerverformungen zu einer Verdrehung der Deckenscheibe. Im Gegensatz zu der reinen U-Stellung kann sich diese Verdrehung hier nicht mehr frei einstellen und wird durch die Wand 4 behindert, was zu Schubspannungen in der Wand 4 führt. Die sich daraus ergebenden Auflagerreaktionen sind in Bild 6-10 dargestellt. Da es sich um ein statisch unbestimmtes System handelt, ist die Größe der Beanspruchung nicht mehr nur über Gleichgewichtsbetrachtung zu ermitteln. Da hier die vertikal verbundenen Wandtafeln nicht starr gelagert sind, können ihre Beanspruchungen nicht mit Hilfe des in Kap. 4.3 vorgestellten Verfahrens berechnet werden.

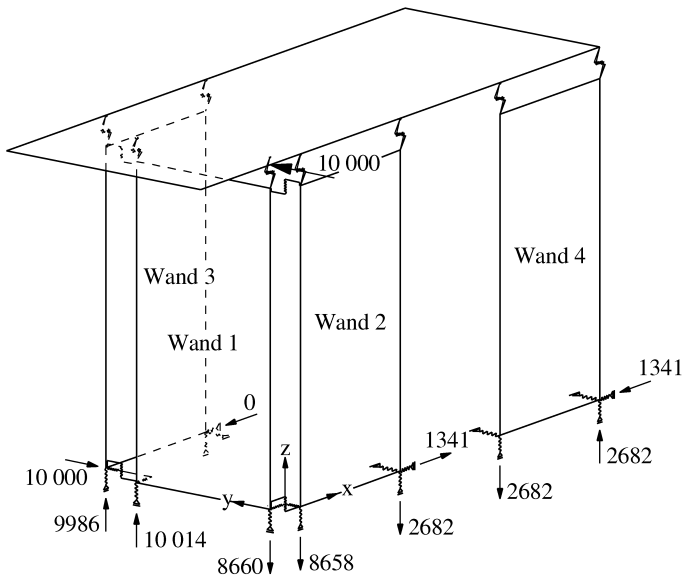


Bild 6-10 : Auflagerreaktionen der Wandtafeln in U+1-Stellung; starre vertikale Verbindung in der U-Stellung und steife Auflager

Durch die Aktivierung der Wand 4 werden die Verformungen der Wand 1 auf $v_2 = 8,39$ mm verringert. Die Verformung der Wand 2 wird gegenüber der einfachen U-Stellung von $u_{102,U} = 4$ mm auf $u_{102,U+1} = 1,77$ mm mehr als halbiert, wie auch Bild 6-11 verdeutlicht. Auf Grund der starren Deckenscheibe gilt $u_{14,U+1} = u_{102,U+1}$. Die Verformungen sind an der Wand 4 wie auch an der Wand 2 nachvollziehbar, wenn die horizontale Beanspruchung bekannt ist. Wie aus Bild 6-10 abzulesen, beträgt die horizontale Beanspruchung der Wand 4 $F_{x,4} = 1341$ N. Die Verformungen der Wand 4 sind dann mit Hilfe der Gln. (5.20) und (5.23) nachvollziehbar,

$$\begin{aligned}
 u_{14,U+1} &= u_v + u_c \\
 &= \frac{1341 \cdot 1}{1250 \cdot 4333} \cdot 2500 + \frac{1341 \cdot 2500}{1250} \cdot \frac{2500}{1250} \cdot \left(\frac{1}{5000} + \frac{1}{66600} \right) = 1,77 \text{ mm.} \quad (6.4)
 \end{aligned}$$

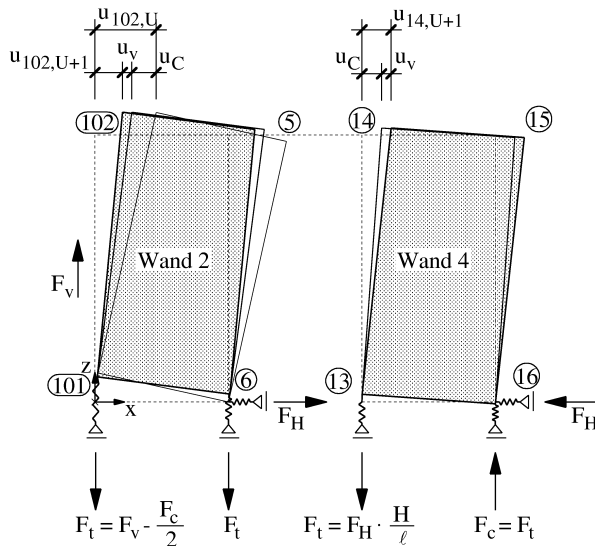


Bild 6-11 : Kräftegleichgewicht und Verformungen der Wände 2 und 4

Wand 2 erhält aus Gleichgewichtsgründen die gleiche horizontale Beanspruchung wie Wand 4 mit umgekehrtem Vorzeichen. Damit ergibt sich für Wand 2 die ungewöhnliche Situation, dass sich die horizontale Verformung am Kopf entgegen der horizontalen Beanspruchung einstellt, weil sich die maßgebende horizontale Verformung aus der vertikalen Auflagerverformung im Punkt 101 ergibt. Wie Bild 6-11 verdeutlicht, lässt sich die Verformung durch Addition der Verformungen des reinen U-Querschnitts ($u_{102,U} = 4 \text{ mm}$) und der Verformungen infolge der Beanspruchung $F_{x,2} = -1341 \text{ N}$ ermitteln,

$$u_{102,U+1} = u_{102,U} + u_v + u_c$$

$$= 4 + \frac{-1341 \cdot 1}{1250 \cdot 4333} \cdot 2500 + \frac{-1341 \cdot 2500}{1250} \cdot \frac{2500}{1250} \cdot \left(\frac{1}{5000} + \frac{1}{10000} \right) = 1,77 \text{ mm.} \quad (6.5)$$

Die endgültigen Verformungen der Wände 2 und 4 sind in Bild 6-11 grau hinterlegt.

Die Steifigkeit $K = 10000 \text{ N/mm}$ in Gl. (6.5) ergibt sich, weil bei der Wand 2 nicht die Steifigkeit eines Druckauflagers aktiviert wird, sondern die Zugsteifigkeiten der Punkte 1001 und 1101 in die Verformungsberechnung eingehen, wobei die Zugkräfte in diesen beiden Auflagern durch die Druckbeanspruchung infolge der horizontalen Beanspruchung vermindert werden.

Die horizontale Beanspruchung der Querwände ist von mehreren Steifigkeitsparametern abhängig. In Bild 6-12 ist die horizontale Beanspruchung der Wand 4 in Abhängigkeit ihrer Steifigkeit angegeben. Die Steifigkeit der Wand 4 wird beeinflusst von ihrer Schubsteifigkeit und der Steifigkeit der Auflager. Es werden die Fälle mit und ohne Berücksichtigung der Schubsteifigkeit betrachtet. Die Veränderung der Gesamtsteifigkeit wird dann über die Steifigkeit des Zugaufagers gesteuert. Die Wände in der U-Stellung haben weiterhin die oben beschriebene Schub- und Auflagersteifigkeiten. Bild 6-12 zeigt, dass die horizontale Beanspruchung der Wand bei Steigerung ihrer Steifigkeit zunimmt, obwohl die Steifigkeit der U-Stellung unverändert bleibt. Ausgehend von einer Steifigkeit des Zugaufagers im Punkt 1013 gleich Null (ohne Zugverankerung), bei der die Wand unbeansprucht bleibt, steigt die horizontale Beanspruchung bei geringer Steifigkeit überproportional an, bevor sie sich bei höheren Steifigkeiten des Zugaufagers ab etwa 20000 N/mm einer Asymptote bei circa 1800 N annähert. Bei Annahme einer schubstarren Wand 4 ist das Verhalten ähnlich. Die Asymptote liegt dann bei etwa 2270 N.

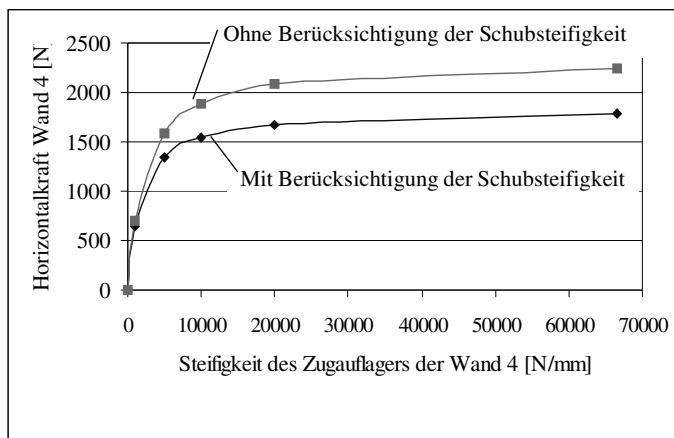


Bild 6-12 : Horizontale Beanspruchung der Wand 4 in Abhängigkeit der Steifigkeit der Wand 4

In Bild 6-13 wird die Steifigkeit der Zugaufleger in den Punkten 1001 und 1101 variiert. Die Schub- und Auflagersteifigkeiten der restlichen Wände bleiben unverändert. Es zeigt sich die große Abhängigkeit der horizontalen Beanspruchung der Wand 4 von der Steifigkeit dieser Zugaufleger. Auch bei fehlendem Zugaufleger in diesen Punkten (Steifigkeit gleich Null) ist die U+1-Wandstellung durch die Verbindung der Wände in der U-Stellung tragfähig. Wand 4

erhält dann eine horizontale Beanspruchung von 10000 N, was der horizontalen Einwirkung auf die Wand 1, also senkrecht zur Wand 4, entspricht. Bei Ansteigen der Steifigkeit der Zugaufleger in den Punkten 1001 und 1101 sinkt die Beanspruchung der Wand 4 sehr schnell und nähert sich bei hohen Steifigkeiten Null. Werden für die Auflagerpunkte die Steifigkeit eines Druckauflagers angesetzt, beträgt die horizontale Beanspruchung der Wand weniger als 10 % der Beanspruchung bei Ansatz der Steifigkeit eines Zugauflegers.

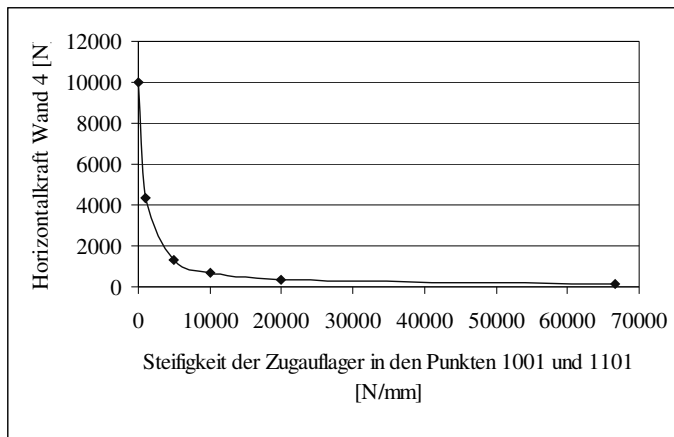


Bild 6-13 : Horizontale Beanspruchung der Wand 4 in Abhängigkeit von der Steifigkeit der Zugaufleger in den Punkten 1001 und 1101

Das Tragverhalten der Wandtafeln in U+1 Stellung und insbesondere die horizontale Beanspruchung der einzelnen Wände kann nicht mit Hilfe der herkömmlichen Verfahren im Holztafelbau analysiert werden. In Kap. 7 wird daher das Tragverhalten der Wandtafeln unter Berücksichtigung der Auflagersteifigkeiten mit Hilfe der Biege- und Torsionstheorie des Stabes betrachtet.

6.4 Wandtafeln mit steifer Verbindung in den Berührungskanten

6.4.1 Wandtafeln in L-Stellung

Wie in Kap. 6.1 beschrieben, werden zwei realistische Steifigkeiten, die in den Gln. (6.1) und (6.2) ermittelt wurden, bei starrer und steifer Lagerung der Wandtafeln untersucht. FE-Modell

und horizontale Einwirkung entsprechen ansonsten dem in Kap. 6.3.1 beschriebenen Modell mit starrer Verbindung.

Bei starrer Lagerung der Wandtafeln hat die Verbindung der Wandtafeln, wie schon in Kap. 6.3.1, keinen Einfluss auf das Tragverhalten der L-Stellung.

Unter Berücksichtigung der Steifigkeit der Lagerung nach den Gln. (5.12) und (5.19) wird, wie schon bei starrer Verbindung der Wandtafeln in Kap. 6.3.1, die Zugverankerung der Wand 2 über die Verbindung der Wandtafeln aktiviert. Verteilt sich die Zugkraft bei starrer Verbindung der Wandtafeln noch gleichmäßig auf die beiden Zugaufleger der Wände 1 und 2, wird hier der Anteil des Zugauflegers der Wand 2 durch die Steifigkeit der Verbindung der Wände vermindert. Die für die Verteilung der Zugkraft anzusetzende Steifigkeit des Zugauflegers im Punkt 1101 $K_{t,1101,m}$ ergibt sich aus dem Federgesetz zu

$$K_{t,1101,m} = \frac{1}{\frac{1}{K_{t,1101}} + \frac{1}{K_{VV,konstr}}} = \frac{1}{\frac{1}{5000} + \frac{1}{2928}} = 1847 \text{ N/mm}, \quad (6.6)$$

mit $K_{t,1101}$ Steifigkeit des Zugauflegers im Punkt 1101 der Wand 2,
 $K_{VV,konstr}$ Steifigkeit der konstruktiven Verbindung der Wandtafeln aus
 $K_{VV,konstr} = 2 \cdot C_{VV,konstr}$ nach GL. (6.1).

Die Auflagerzugkraft $F_{t,1101}$ der Wand 2 bei einer konstruktiven Verbindung der Wände ergibt dann aus

$$F_{t,1101} = \frac{K_{t,1101,m}}{(K_{t,1101,m} + K_{t,1})} \cdot F_t = \frac{1847}{(1847 + 5000)} \cdot 20000 = 5395 \text{ N}. \quad (6.7)$$

Dies entspricht der Auflagerkraft im FE-Modell.

In Bild 6-14 ist die Zugauflegerkraft $F_{t,1101}$ der Wand 2 in Abhängigkeit der Steifigkeit der Verbindung der Wände dargestellt. Die Zugaufleger der Wände 1 und 2 haben dabei eine Steifigkeit $K_t = 5000 \text{ N/mm}$ nach Gl. (5.19). Bild 6-14 zeigt, dass schon bei sehr geringen Steifigkeiten der Verbindung die Zugverankerung der Querwand aktiviert wird. Schon bei der konstruktiven Verbindung werden mehr als 25 % der Gesamtzugkraft an den Zuganker der Wand 2 abgegeben. Bei einer statisch wirksamen Verschraubung mit schrägen Schrauben verhalten sich die Wände fast wie starr verbunden. Nahezu 50 % der Gesamtzugkraft werden an den Zuganker der Wand 2 weitergeleitet.

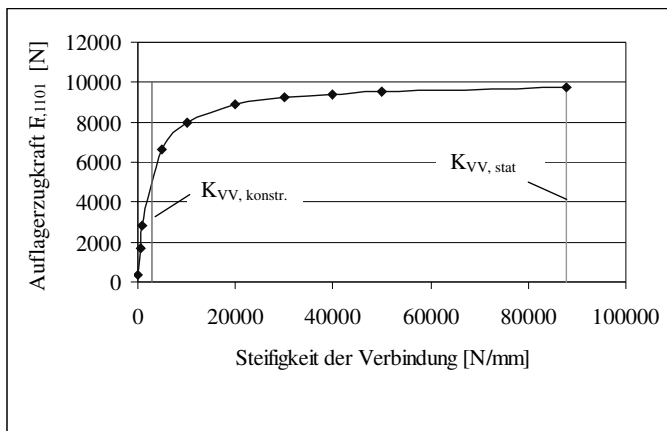


Bild 6-14 : Auflagerkraft $F_{t,1101}$ in Abhängigkeit der Steifigkeit der Verbindung der Wände

Entsprechend der veränderten Verteilung der Zugkraft vergrößert sich die Verformung v_2 und verkleinert sich die Verformung u_{102} gegenüber der L-Stellung mit starrer Verbindung in Kap. 6.3.1. Gegenüber einer einfachen Wandtafel bedeutet die Aktivierung des Zugankers der Wand 2 auch schon bei einer konstruktiven Verbindung der Wände eine deutliche Reduzierung der Verformung.

6.4.2 Wandtafeln in U-Stellung

Auch bei den Wandtafeln in U-Stellung hat die Steifigkeit der Verbindung keinen Einfluss auf das Tragverhalten der Wände, wenn die Lagerung der Wände als starr angenommen wird.

Bei Berücksichtigung der Steifigkeit der Lagerung kommt es zu der in Kap. 6.3.2 beschriebenen Verdrehung der Deckenscheibe infolge der gegensätzlichen Verformungen der Wände 2 und 3. Allerdings ist die Verdrehung hier geringer, da die Verformungen der Wände 2 und 3 durch die Steifigkeit der Verbindung geringer sind. Auf der Zugseite der U-Stellung verhalten sich Wand 1 und 2 wie für die L-Stellung in Kap. 6.4.1 beschrieben. Auf der Druckseite wird das Druckauflager $F_{c,1104}$ der Wand 3 nicht so stark aktiviert wie auf der Zugseite das Zugaflager $F_{t,1101}$ der Wand 2. Dies ist in der größeren Steifigkeit des Druckauflagers im Verhältnis zur Steifigkeit der Verbindung der Wände begründet. In Bild 6-15 ist die Druckauflagerkraft $F_{c,1104}$ der Wand 3 in Abhängigkeit der Steifigkeit der Verbindung der Wände veranschaulicht. Die Druckauflager der Wände 1 und 3 haben dabei

eine Steifigkeit $K_c = 66600 \text{ N/mm}$ nach Gl. (5.12). Bild 6-15 zeigt, dass durch die hohe Auflagersteifigkeit über die konstruktive Verbindung nur etwa 4 % der Gesamtdruckkraft an das Auflager der Wand 3 weitergeleitet wird. Auch über die wesentlich steifere Verbindung mit schrägen Schrauben werden nur etwa 36 % übertragen.

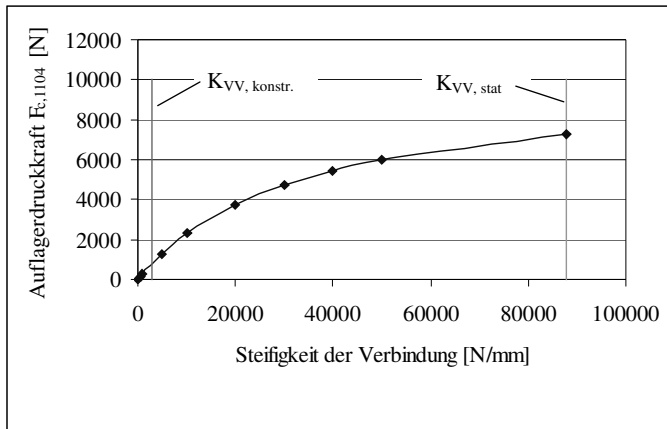


Bild 6-15 : Auflagerkraft $F_{c,1104}$ in Abhängigkeit der Steifigkeit der Verbindung der Wände

In Bild 6-16 ist die vertikale Auflagerkraft der Querwand an der Berührungskante in Abhängigkeit von der Steifigkeit der beiden beteiligten Auflager dargestellt. Wie schon aus Bild 6-14 und Bild 6-15 zu ersehen ist, zeigt sich, dass insbesondere bei der konstruktiven Verbindung der Wände die Steifigkeit der Auflager einen großen Einfluss auf die Verteilung der Gesamtauflagerkraft hat. Die Auflagerkraft der Querwand nimmt hier insbesondere im Bereich weicher Auflager, zu denen die Zugaufleger der Wandtafeln zu zählen sind, bei steigender Steifigkeit der Auflager stark exponentiell ab. Bei der wesentlich steiferen Verbindung mit schrägen Schrauben ist der Einfluss der Steifigkeit der Auflager sehr viel geringer. Die Auflagerkraft der Querwand nimmt bei steigender Steifigkeit der Auflager nur sehr langsam und annähernd linear ab.

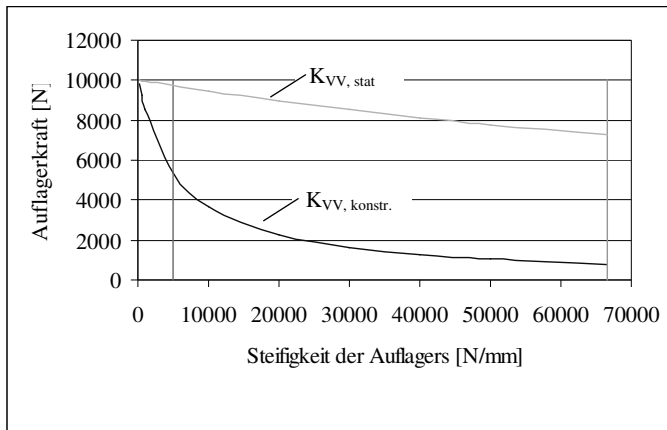


Bild 6-16 : Auflagerkraft der Querwand in Abhängigkeit der Steifigkeit der Auflager

6.4.3 Wandtafeln in U+1-Stellung

Bei starrer Lagerung der Wandtafeln hat die Steifigkeit der Verbindung auch in der U+1-Stellung keinen Einfluss auf das Tragverhalten der Wandtafeln.

Wird die Steifigkeit der Lagerung berücksichtigt, kommt es zu dem bereits in Kap. 6.3.3 beschriebenen Tragverhalten. Die Verdrehung der Deckenscheibe und damit auch die Beanspruchung der Wand 4 wird durch die Steifigkeit der Verbindung der Wände vermindert. Die horizontalen Auflagerreaktionen der Wände sind in Bild 6-17 für die beiden Steifigkeiten $K_{VV, konstr}$ und $K_{VV, stat}$ abgebildet. Es zeigt sich, dass die Wand 4 auch bei Berücksichtigung der Steifigkeit der Verbindung der Wände beansprucht wird. Bei der Verbindung mit schrägen Schrauben entspricht die Beanspruchung dabei fast der bei starrer Verbindung. Auch bei der weichen, konstruktiven Verbindung beträgt die Beanspruchung der Wand 4 noch über 50 % derjenigen bei starrer Verbindung.

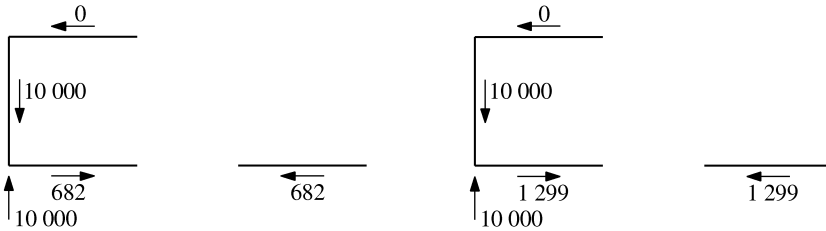
a) $K_{VV, \text{konstr}}$ b) $K_{VV, \text{stat}}$

Bild 6-17 : Horizontale Auflagerreaktionen der Wandstellung U+1 in der Grundrissansicht; steife vertikale Verbindung in der U-Stellung und steife Auflager

Bild 6-18 verdeutlicht, dass die Beanspruchung der Wand 4 schon bei sehr geringer Steifigkeit der Verbindung der Wände in der U-Stellung stark ansteigt und sich schnell der Asymptote bei 1341 N – der Beanspruchung bei starrer Verbindung - annähert.

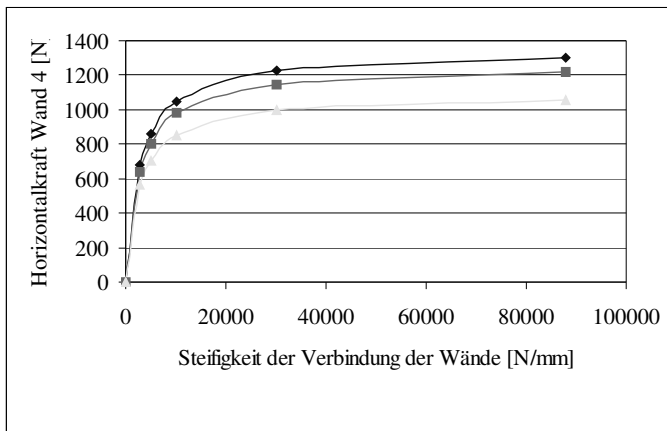


Bild 6-18 : Horizontale Beanspruchung der Wand 4 in Abhängigkeit von der Steifigkeit der Verbindung der Wände in der U-Stellung

Die horizontale Beanspruchung der Wand 4 bei Variation der Steifigkeit der Zugaufleger in den Punkten 1001 und 1101 für die starre und konstruktive Verbindung der Wände ist in Bild 6-19 und Bild 6-20 dargestellt. Die obere Kurve zeigt die Beanspruchung bei starrer Verbindung und entspricht der Kurve in Bild 6-13. Wie aus Bild 6-17, Bild 6-19 und

Bild 6-20 ersichtlich, hat dabei die Steifigkeit der Verbindung zwischen den Wänden der U-Stellung einen großen Einfluss auf die Beanspruchung der Wand 4. Die Beanspruchung sinkt bei abnehmender Steifigkeit der Verbindung. Der Unterschied der Beanspruchung zwischen starrer und konstruktiver Verbindung steigt mit zunehmender Steifigkeit der Zugaufleger in den Punkten 1001 und 1101. So wird bei einer Steifigkeit der Zugaufleger von 5000 N/mm die Beanspruchung der Wand 4 durch eine konstruktive Verbindung im Vergleich zur starren Verbindung etwa halbiert. Bei einer Steifigkeit der Zugaufleger von 10000 N/mm beträgt sie nur noch etwa ein Drittel, bei 20000 N/mm lediglich ein Viertel.

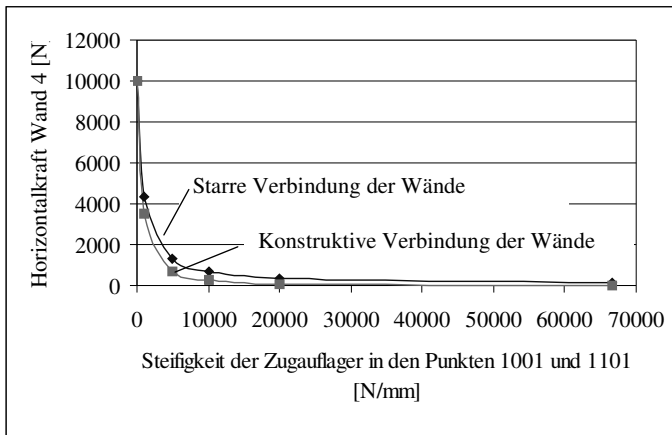


Bild 6-19 : Horizontale Beanspruchung der Wand 4 in Abhängigkeit von der Steifigkeit der Zugaufleger in den Punkten 1001 und 1101

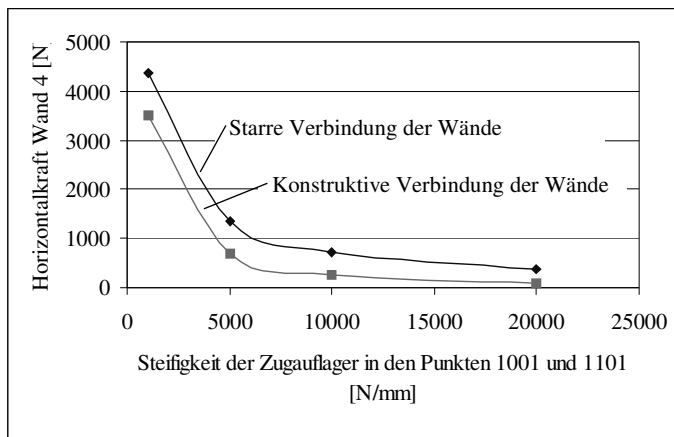


Bild 6-20 : Horizontale Beanspruchung der Wand 4 in Abhängigkeit von der Steifigkeit der Zugaufleger in den Punkten 1001 und 1101, Steifigkeit zwischen 1000 N/mm und 20000 N/mm

Die Untersuchungen der U+1-Stellung unter Berücksichtigung der Steifigkeit der Verbindung der Wände zeigen, dass auch schon eine rein konstruktive Verbindung der Wände das Tragverhalten gegenüber unverbundenen Wänden stark verändert. Der Einfluss auf das Gesamtsystem ist durch die Steifigkeit der Verbindung gegenüber der starren Verbindung natürlich geringer. Das Tragverhalten nähert sich jedoch bei steigender Steifigkeit der Verbindung schnell dem Verhalten bei starrer Verbindung an.

6.5 Einfluss der Steifigkeit der Verbindung Wand-Decke

Die bisherigen Untersuchungen haben gezeigt, dass das Tragverhalten der Aussteifungssysteme stark von den Steifigkeiten der Verbindungen und Lagerungen abhängig ist. Damit hat auch die Steifigkeit der Verbindung zwischen Wandtafel und Deckenscheibe einen gewissen Einfluss auf die Größe der Beanspruchungen. Diese Verbindung wurde für die bisherigen Untersuchungen als starr angenommen. Bild 6-21 beschreibt den Einfluss der Steifigkeit dieser Verbindung auf die horizontale Beanspruchung der Wand 4 in der U+1-Stellung in Abhängigkeit von der Steifigkeit der Verbindung der Wände untereinander. Es zeigt sich, dass das Tragverhalten der U+1-Stellung gleich bleibt und lediglich die Beanspruchung der Wand 4 durch die Steifigkeit der Verbindung Wand-Decke vermindert wird. Auch bei einer sehr weichen, konstruktiven Verbindung zwischen den Wänden und der

Decke ($K_{DW} = 2928 \text{ N/mm}$) beträgt die Abminderung nur etwa 20 % im Vergleich zu einer starren Verbindung. Da die Verbindung zwischen Wänden und Decken jedoch statisch notwendig ist, kann von einer höheren Steifigkeit ausgegangen werden, so dass der Einfluss der Steifigkeit dieser Verbindung noch geringer ausfällt und somit weiterhin vernachlässigt werden kann. Gegebenenfalls ist die Steifigkeit dieses Anschlusses leicht über die Schubsteifigkeit der Wandtafel zu berücksichtigen.

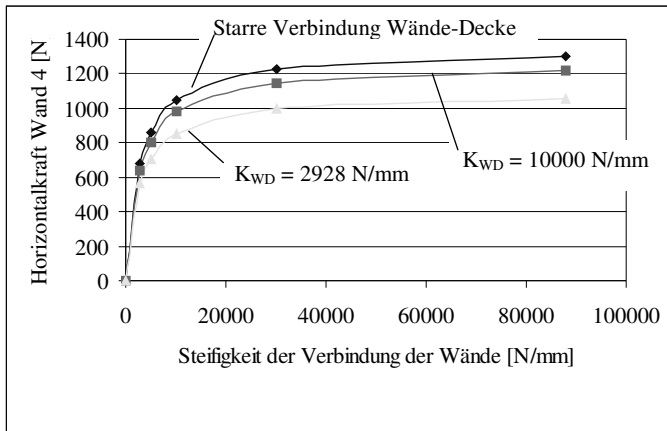
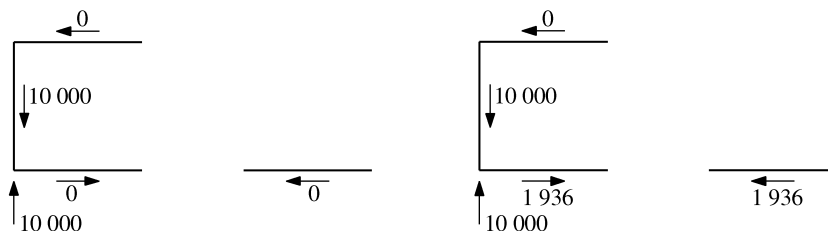


Bild 6-21 : Einfluss der Steifigkeit der Verbindung Wandtafel – Deckenscheibe

7 Analytische Beschreibung des Tragverhaltens von Wandtafeln mit Verbindung in den Berührungskanten

7.1 Allgemeines

Die Untersuchungen der Wandtafeln unter Berücksichtigung der Auflagersteifigkeiten und der vertikalen Verbindung untereinander in Kap. 6 haben gezeigt, dass das Tragverhalten der räumlichen Anordnung der Wandtafeln nicht mehr mit Hilfe der im Holztafelbau üblichen Berechnungsverfahren nachvollziehbar ist, da das Gesamttragverhalten der räumlichen Anordnung entscheidend durch die Auflagerverformungen und die direkte Verbindung der Wandtafeln beeinflusst wird. Die Verformungen des Gesamttragwerks setzen sich dabei aus Biegeverformungen infolge der Auflagersteifigkeiten und Schubverformungen der Wandtafel zusammen. Bei der Untersuchung der Wandstellung U+1 unter Vernachlässigung der Biegeverformungen, also mit starren Auflagern und einem Schubmodul nach Gl. (5.21), ergeben sich die in Bild 7-1a angegebenen horizontalen Auflagerreaktionen der einzelnen Wände. Diese sind mit Hilfe der Verfahren für den Holztafelbau nach Kap. 4.3 nachvollziehbar, wobei dort das System aus 4 einzelnen Wänden besteht. Die Untersuchung der Wandstellung U+1 unter Vernachlässigung der Schubverformungen, also mit der Steifigkeit der Auflager nach den Gln. (5.12) und (5.19) und einem Schubmodul $G = 999999 \text{ N/mm}^2$ für die Ein-Element-Tafel, ergibt die in Bild 7-1b angegebenen horizontalen Auflagerreaktionen der einzelnen Wände. Es kommt zu der in Kap. 6.3.3 beschriebenen Verdrehung der Deckenscheibe, wodurch auch die Wand 4 beansprucht wird. Die Addition der Ergebnisse aus Bild 7-1a und b ergibt nicht die gleichen horizontalen Auflagerreaktionen, wie bei gleichzeitiger Berücksichtigung der Auflager- und Schubsteifigkeit in Bild 6-10. Eine einfache Addition der Ergebnisse aus Biege- und Schubsystem ist also nicht möglich, um das Tragverhalten der in Kap. 6 betrachteten U+1-Stellung richtig zu beschreiben.



a) Schubsystem: Vernachlässigung der Biegeverformungen infolge der Auflagersteifigkeiten

b) Biegesystem: Vernachlässigung der Schubverformungen der Wandtafel

Bild 7-1 : Horizontale Auflagerreaktionen der Wandstellung U+1 in der Grundrissansicht

Um das Tragverhalten des in Kap. 6.3.3 vorgestellten Systems richtig zu analysieren, wird hier zunächst das System unter Vernachlässigung der Schubverformungen mit Hilfe der in Kap. 3 vorgestellten Biege- und Torsionstheorie für den Stab beschrieben. Dabei wird, wie in Kap. 5.2 und 6, ausgehend von der einfachen Wandtafel die L-, U- und U+1-Stellung betrachtet.

7.2 Tragverhalten der einfachen Wandtafel unter Biegeverformung

Bei der Berechnung einer Wand mit Hilfe der Stabtheorie nach Kap. 3 treten innerhalb des Wandquerschnitts linear veränderliche Normalspannungen auf. Infolge dieser veränderlichen Normalspannungen kommt es, wie in Bild 7-2a zu erkennen, zu unterschiedlichen Dehnungen in Längsrichtung der Wand, was zu einer horizontalen Verformung des Stabes (der Wand) führt. Die horizontalen Verformungen der Wandtafeln unter Berücksichtigung der Auflagersteifigkeiten ergeben sich, wie in Bild 7-2b zu erkennen, infolge von punktuellen, unterschiedlichen Dehnungen an den Auflagerpunkten in Längsrichtung der Wandtafeln. Die Wandtafel selber verdreht sich infolge der unterschiedlichen Auflagerdehnungen, ihre Form bleibt aber, wegen der Vernachlässigung der Schubverformungen, als Starrkörper erhalten.

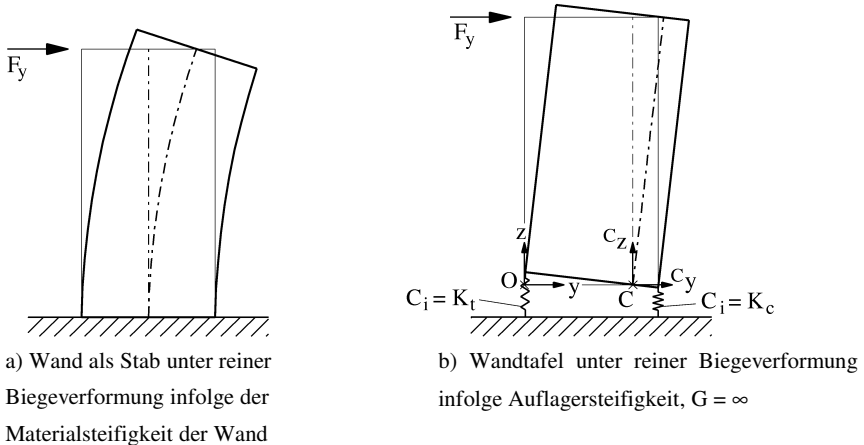


Bild 7-2 : Biegeverformungen einer Wandtafel

In Kap. 3 werden die Verformungen $w(y, z)$ des einfachen Stabes infolge der Normalspannungen mit Gl. (3.1) und Bild 3-4 beschrieben. Für die Wandtafel mit Berücksichtigung der Auflagersteifigkeit ist der Winkel ψ unabhängig von z , da die Verformungen nur infolge der Auflagerverformungen w_i auftreten und ψ damit über z konstant ist. Gl. (3.1) vereinfacht sich damit zu

$$w(y) = \psi \cdot C_y. \quad (7.1)$$

Während in der Stabtheorie die Verformungen w weiter nach Gl. (3.2) mit den Dehnungen in Beziehung gesetzt werden, ergeben sich die Auflagerverformungen w_i hier aus dem Federgesetz mit

$$w_i = \frac{F_{V,i}}{C_i}, \quad (7.2)$$

wobei $F_{V,i}$ die vertikale Auflagerreaktion der Wandtafel ist. Sie folgt aus den Gln. (7.1) und (7.2) zu

$$F_{V,i} = \psi \cdot C_{y_i} \cdot C_i. \quad (7.3)$$

Die Schnittgröße M_x errechnet sich in der Stabtheorie aus der Integration der Normalspannungen über die Querschnittsfläche bezogen auf den Schwerpunkt des Querschnitts nach Gl. (3.7). Hier entspricht M_x der Summe des Produktes von Auflagerreaktionen und Abstand zum Schwerpunkt,

$$M_x = \sum F_{V,i} \cdot C_{y_i}. \quad (7.4)$$

Das Einsetzen von Gl. (7.3) in (7.4) ergibt

$$M_x = \psi \cdot \sum C_i \cdot {}^c y_i^2 . \quad (7.5)$$

In Analogie zum Trägheitsmoment der Biegetheorie wird ein Auflagerträgheitsmoment

$$I_{C,x} = \sum C_i \cdot {}^c y_i^2 \quad (7.6)$$

eingeführt. Damit folgt aus Gl. (7.5)

$$\psi = \frac{M_x}{I_{C,x}} \quad (7.7)$$

und somit die vertikalen Auflagerreaktionen

$$F_{V,i} = \frac{M_x}{I_{C,x}} \cdot {}^c y_i \cdot C_i . \quad (7.8)$$

In der Stabtheorie ist die Schwerachse dadurch definiert, dass sie infolge einer Biegebeanspruchung keine Dehnung erhält. Entsprechend lässt sich die Schwerachse hier als die Achse definieren, die infolge der Biegebeanspruchung keine Verschiebung w erfährt. In Bild 7-2b ist zu erkennen, dass sich die Schwerachse zu dem steiferen Druckauflager hin verschiebt. Von einem beliebigen Ursprungspunkt O aus ergibt sich die Schwerpunktskoordinate aus

$$y_C = \frac{\sum y_i \cdot C_i}{\sum C_i} . \quad (7.9)$$

Bei Vernachlässigung der Schubverformungen ergibt sich eine konstante Neigung v' der Wandtafel und damit unter Berücksichtigung der geometrischen Randbedingung die Verschiebungsfunktion

$$v(z) = \frac{F_y \cdot H}{I_{C,x}} \cdot z . \quad (7.10)$$

Der Schubfluss $T(s)$ der Wandtafel errechnet sich in Analogie zur Stabtheorie aus

$$T(s) = \frac{V_y \cdot S_{C,x}(s)}{I_{C,x}} . \quad (7.11)$$

Das statische Auflagermoment $S_{C,x}(s)$ setzt sich aus den Auflagersteifigkeiten $C_{\tau,i}$ zusammen, die sich innerhalb der Fläche A_τ nach Bild 3-5 befinden,

$$S_{C,x}(s) = \sum {}^c y_{\tau,i} \cdot C_{\tau,i} . \quad (7.12)$$

Der ermittelte Schubfluss ist bis zum nächsten Auflagerpunkt konstant. Für die einfache Wandtafel ist es somit ausreichend, den Schubfluss an einer Stelle zu ermitteln. Die horizontale Beanspruchung $R_{H,j}$ der einzelnen Wandtafel j ergibt sich dann aus

$$R_{H,j} = T(s) \cdot \ell_j. \quad (7.13)$$

Entsprechend der in Kap. 3 gezeigten Analogie der Wölbtheorie zur Biegetheorie lassen sich auch für die Wandtafel unter Berücksichtigung der Auflagersteifigkeit die Beanspruchungen und Verformungen infolge einer Torsionsbeanspruchung angeben.

Die vertikalen Auflagerreaktionen $F_{V,i}$ errechnen sich entsprechend den Gln. (3.51) und (7.8) aus

$$F_{V,i} = -\frac{M_{\omega}}{I_{C,\omega}} \cdot s_{\omega} \cdot C_i, \quad (7.14)$$

mit dem Auflagerwölbwiderstand $I_{C,\omega}$ entsprechend den Gln. (3.52) und (7.6)

$$I_{C,\omega} = \sum C_i \cdot s_{\omega_i}^2. \quad (7.15)$$

Der Schubfluss T_{ω} ergibt sich entsprechend den Gln. (3.56) und (7.11)

$$T_{\omega,i} = \frac{V_{\omega} \cdot S_{C,\omega,i}}{I_{C,\omega}}, \quad (7.16)$$

mit

$$S_{C,\omega,i} = \sum s_{\omega_i} \cdot C_i. \quad (7.17)$$

Die Verformungen der Wandtafel am Kopfpunkt ergeben sich infolge der Verdrehung ϑ des Querschnitts aus Gl. (3.61) und (3.62). Die Verdrehung folgt entsprechend der Gln. (3.60) und (7.10) zu

$$\vartheta = \frac{M_T \cdot H^2}{I_{C,\omega}}. \quad (7.18)$$

7.3 Tragverhalten der L-Stellung

Das Trag- und Verformungsverhalten der in Kap. 6.3.1 untersuchten L-Stellung zweier Wände kann mit Hilfe der in Kap. 7.2 vorgestellten Gleichungen analysiert werden. Zur Berechnung wird für die Auflager in den Punkten 1001 und 1101 gemäß Bild 6-3 die Steifigkeit des Zugauflagers nach Gl. (5.19) und für die Auflagerpunkte 1004 und 1006 die Steifigkeit des Druckauflagers nach Gl. (5.12) angenommen.

Der Schwerpunkt der L-Stellung errechnet sich mit Gl. (7.9) zu

$$y_C = \frac{1250 \cdot 66600}{(2 \cdot 5000 + 2 \cdot 66600)} = 581 \text{ mm} = x_C. \quad (7.19)$$

Die Auflagerträgheitsmomente ergeben sich entsprechend Gl. (7.6) aus

$$I_{C,x} = 66600 \cdot 669^2 + (2 \cdot 5000 + 66600) \cdot (-581)^2 = 5,57 \cdot 10^{10} \frac{\text{N}}{\text{mm}} \cdot \text{mm}^2 = I_{C,y}. \quad (7.20)$$

Das Auflagerzentrifugalmoment folgt aus

$$I_{C,xy} = 2 \cdot 66600 \cdot 669 \cdot (-581) + 2 \cdot 5000 \cdot (-581) \cdot (-581) = -4,84 \cdot 10^{10} \frac{\text{N}}{\text{mm}} \cdot \text{mm}^2. \quad (7.21)$$

Da $I_{C,x} = I_{C,y}$ ergibt sich $\varphi = 45^\circ$ und die Hauptauflagermomente entsprechend Gl. (3.43) mit

$$I_{C,\xi} = 5,57 \cdot 10^{10} - (-4,84 \cdot 10^{10}) = 1,04 \cdot 10^{11} \frac{\text{N}}{\text{mm}} \cdot \text{mm}^2, \quad (7.22)$$

$$I_{C,\eta} = 5,57 \cdot 10^{10} + (-4,84 \cdot 10^{10}) = 0,73 \cdot 10^{10} \frac{\text{N}}{\text{mm}} \cdot \text{mm}^2. \quad (7.23)$$

Die Koordinaten der Auflagerpunkte im Hauptachsensystem ergeben sich aus

$$\xi_i = {}^C x_i \cdot \cos \varphi + {}^C y_i \cdot \sin \varphi, \quad (7.24)$$

$$\eta_i = -{}^C x_i \cdot \sin \varphi + {}^C y_i \cdot \cos \varphi. \quad (7.25)$$

Das bedeutet beispielhaft für Punkt 1004

$$\xi_{1004} = (-581) \cdot \cos 45^\circ + 669 \cdot \sin 45 = 62 \text{ mm}, \quad (7.26)$$

$$\eta_{1004} = -(-581) \cdot \sin 45 + 669 \cdot \cos 45 = 884 \text{ mm}. \quad (7.27)$$

Entsprechend den Koordinaten lassen sich auch die Einwirkungen auf das Hauptachsensystem umrechnen,

$$F_\xi = F_x \cdot \cos \varphi + F_y \cdot \sin \varphi = 7071 \text{ N}, \quad (7.28)$$

$$F_\eta = -F_x \cdot \sin \varphi + F_y \cdot \cos \varphi = 7071 \text{ N}. \quad (7.29)$$

Damit ergeben sich die Momente

$$M_\xi = -7071 \cdot 2500 = -1,77 \cdot 10^7 \text{ Nmm}, \quad (7.30)$$

$$M_\eta = 7071 \cdot 2500 = 1,77 \cdot 10^7 \text{ Nmm}. \quad (7.31)$$

Die Auflagerreaktionen $F_{V,i}$ folgen, unter Berücksichtigung von Gl. (3.45), entsprechend Gl. (7.8) aus

$$F_{V,i} = \frac{M_\xi}{I_{C,\xi}} \cdot {}^C \eta_i \cdot C_i - \frac{M_\eta}{I_{C,\eta}} \cdot {}^C \xi_i \cdot C_i, \quad (7.32)$$

$$F_{V,1004} = \frac{-1,77 \cdot 10^7}{1,04 \cdot 10^{11}} \cdot 884 \cdot 66600 - \frac{1,77 \cdot 10^7}{0,73 \cdot 10^{10}} \cdot 62 \cdot 66600 = -20000 \text{ N.} \quad (7.33)$$

Außerdem ergibt sich $F_{V,1001} = F_{V,1101} = 10000 \text{ N}$ und $F_{V,1006} = 0 \text{ N}$. Dies entspricht den Ergebnissen des FE-Modells.

Die Kopfverformungen der Wandtafel errechnen sich entsprechend Gl. (7.10) zu

$$v_{\xi} = \frac{F_{\xi} \cdot H^2}{I_{C,\eta}} = \frac{7071 \cdot 2500^2}{0,73 \cdot 10^{10}} = 6,05 \text{ mm}, \quad (7.34)$$

$$v_{\eta} = \frac{F_{\eta} \cdot H^2}{I_{C,\xi}} = \frac{7071 \cdot 2500^2}{1,04 \cdot 10^{11}} = 0,42 \text{ mm}. \quad (7.35)$$

Die Verformungen in Richtung des x-, y-Koordinatensystems ergeben sich aus

$$u = v_{\xi} \cdot \cos \varphi - v_{\eta} \cdot \sin \varphi = 6,05 \cdot \cos 45^\circ - 0,42 \cdot \sin 45^\circ = 3,98 \text{ mm}, \quad (7.36)$$

$$v = v_{\xi} \cdot \sin \varphi + v_{\eta} \cdot \cos \varphi = 6,05 \cdot \sin 45^\circ + 0,42 \cdot \cos 45^\circ = 4,57 \text{ mm}. \quad (7.37)$$

Die Verformungen entsprechen den Ergebnissen des FE-Modells bei Vernachlässigung der Schubverformungen der Wandtafel.

Der Schubfluss errechnet sich entsprechend Gl. (7.11) aus

$$T(s) = \frac{V_{\eta} \cdot S_{C,\xi}(s)}{I_{C,\xi}} + \frac{V_{\xi} \cdot S_{C,\eta}(s)}{I_{C,\eta}}. \quad (7.38)$$

Während in Kap. 7.2 noch die Ermittlung des Schubflusses an einer Stelle ausreichend war, muss hier, beginnend an einem freien Rand, der Schubfluss hinter jedem Auflagerpunkt ermittelt werden. Zwischen den einzelnen Auflagerpunkten ist der Schubfluss konstant.

Die statischen Steifigkeitsmomente $S_{C,\xi,1004}$ und $S_{C,\eta,1004}$ hinter dem Auflagerpunkt 1004 ergeben sich zu

$$S_{C,\xi,1004} = 884 \cdot 66600 = 5,89 \cdot 10^7 \frac{\text{N}}{\text{mm}}, \quad (7.39)$$

$$S_{C,\eta,1004} = 62 \cdot 66600 = 4,1 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{mm}} \quad (7.40)$$

und damit der Schubfluss T_{1004} zu

$$T_{1004} = \frac{7071 \cdot 5,89 \cdot 10^7}{1,04 \cdot 10^{11}} + \frac{7071 \cdot 4,1 \cdot 10^6}{0,73 \cdot 10^{10}} = 8 \text{ N/mm}. \quad (7.41)$$

Die resultierende horizontale Beanspruchung der Wandtafel folgt aus Gl. (7.13) zu

$$R_{H,1} = 8 \cdot 1250 = 10000 \text{ N}. \quad (7.42)$$

Die Resultierende der Wand 2 ist gleich Null. Zwischen beiden Wandtafeln muss über die Verbindung ein Schubfluss $T_{1001} = 4 \text{ N/mm}$ übertragen werden. Die Ergebnisse stimmen somit mit den Ergebnissen des FE-Modells überein.

Oben wurden die Steifigkeiten der Auflager entsprechend der im Ergebnis auftretenden Richtung der Auflagerkraft angenommen. Ob an einem Auflager Zug- oder Druckkräfte auftreten ist im Allgemeinen jedoch nicht bekannt. Der Ansatz einer „falschen“ Steifigkeit kann, wegen des in Bild 7-3 dargestellten großen Unterschieds zwischen Druck- und Zugsteifigkeit, zu einer falschen Einschätzung des Trag- und Verformungsverhaltens des Aussteifungssystems führen. Ist das Tragverhalten des Aussteifungssystems gänzlich unbekannt, wird zunächst für alle Auflager die Steifigkeit eines Druckauflagers angenommen. In einem zweiten Schritt wird dann mit Hilfe der Ergebnisse aus dem ersten Schritt an allen Auflagerpunkten mit $F_{V,i} > 0$ die Steifigkeit eines Zugauflagers angenommen und die Berechnung wiederholt. Dieses Vorgehen wird in Kap. 7.5 angewandt.

Die durch die beschriebenen Vorberechnung ermittelten Auflagerquerschnittswerte des Aussteifungssystems sind durch die unterschiedliche Steifigkeit der Zug- und Druckauflager lastabhängig. Die Auflagerquerschnittswerte sind somit nur für die gegebene Einwirkung anwendbar und ändern sich gegebenenfalls bei Änderung des Lastangriffspunktes oder der Richtung der Einwirkung. Bei Annahme einer aus Zug- und Druckauflager gemittelten Steifigkeit, wie in Bild 7-3 dargestellt, können die Steifigkeitswerte unabhängig von den Einwirkungen und ohne Vorberechnung ermittelt werden. Aufgrund des in Bild 6-19 und Bild 6-20 gezeigten großen Einflusses der Auflagersteifigkeit auf das Tragverhalten des Systems, führt die gemittelte Steifigkeit jedoch bei denen im Rahmen dieser Arbeit gewählten großen Steifigkeitsunterschieden zu unzureichenden Ergebnissen.

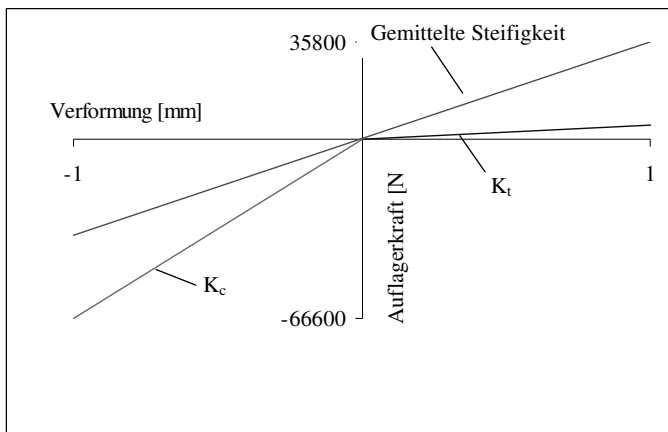


Bild 7-3 : Zug- und Drucksteifigkeit der Auflager

Bei der hier betrachteten L-Stellung hat die Wahl einer falschen Auflagersteifigkeit keinen Einfluss auf die horizontale Beanspruchung und Auflagerreaktionen der Wandtafeln, da ein statisch bestimmtes System vorliegt. Das Verformungsverhalten kann dann jedoch nicht richtig abgebildet werden, was bei Einbindung der L-Stellung in ein statisch unbestimmtes Gesamtsystem wiederum zu einem falschen Tragverhalten führen kann.

7.4 Tragverhalten der U-Stellung

Auch das Trag- und Verformungsverhalten des FE-Modells der Wandtafeln in U-Stellung in Kap. 6.3.2 kann mit Hilfe des in Kap. 7.2 und 7.3 vorgestellten Verfahrens abgebildet werden. Bei der gegebenen Einwirkung wird für die Auflagersteifigkeiten $K_{c,1004} = K_{c,1008} = K_{c,1104} = 66600 \text{ N/mm}$ und $K_{t,1001} = K_{t,1006} = K_{t,1101} = 5000 \text{ N/mm}$ angenommen. Mit Hilfe der sich daraus ergebenden Auflagerquerschnittswerte errechnet sich die Position des Schubmittelpunktes entsprechend der Gln (3.71) und (3.72) zu $x_S = -416,7 \text{ mm}$ und $y_S = 1162,7 \text{ mm}$. Damit ergibt sich infolge der horizontalen Einwirkung im Punkt 202 ein Torsionsmoment, was wiederum zu der in Kap. 6.3.2 beschriebenen Verdrehung des Querschnitts führt. Auf eine zahlenmäßige Analyse des Tragverhaltens soll hier verzichtet werden, da die U-Stellung auch in der U+1-Stellung im folgenden Kapitel betrachtet wird

7.5 Wandtafeln in beliebiger Grundrissanordnung unter Biegeverformung

In diesem Kapitel werden die Gleichungen für eine beliebige Anordnung der Wände vorgestellt und anhand der U+1-Stellung angewandt. Dabei wird, wie in Kap. 7.3 beschrieben, für alle Auflager zunächst die Steifigkeit des Druckauflagers mit $K_c = 66600 \text{ N/mm}$ angenommen, da nicht offensichtlich ist, an welchem Auflager Zugkräfte und an welchem Druckkräfte auftreten.

Mit dem Einheitsverschiebungsvektor nach Gl. (3.54) ergeben sich, unter Berücksichtigung von Gl. (7.6), aus Gl. (3.55) die Auflagerquerschnittswerte zu

$$\overline{A_{C,k}} = \sum C_i \cdot \overrightarrow{a_{ki}} \cdot \overleftarrow{a_{ki}}^T. \quad (7.43)$$

Entsprechend folgen aus Gl. (3.53) unter Berücksichtigung von Gl. (7.8) die vertikalen Auflagerreaktionen zu

$$F_{V,i} = \overrightarrow{a_{ki}}^{S \rightarrow T} \cdot \overleftarrow{A_C}^{S \rightarrow -1} \cdot \overrightarrow{S_\sigma} \cdot C_i. \quad (7.44)$$

Die U+1-Stellung setzt sich aus einem U-Querschnitt (Querschnitt 1) und einer einfachen Wandtafel (Querschnitt 2) zusammen. Die Einheitsverschiebungen der beiden Querschnitte sind in Bild 7-4 und Bild 7-5 dargestellt. Der Einheitsverschiebungsvektor des Punktes 1006, siehe Bild 6-8, ergibt sich somit beispielsweise zu

$$\overrightarrow{a_{2,1006,1}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1250 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (7.45)$$

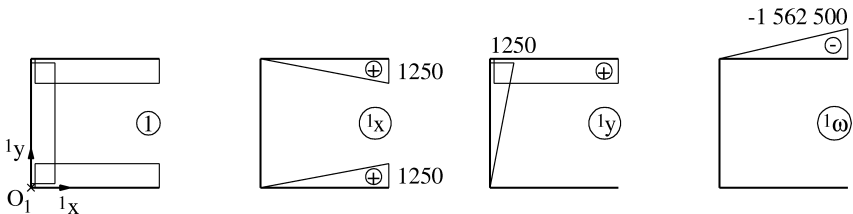


Bild 7-4 : Einheitsverschiebungen Querschnitt 1

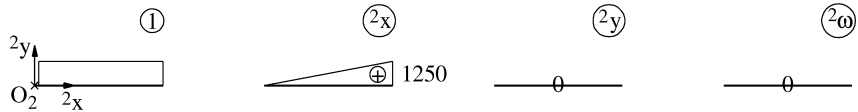


Bild 7-5: Einheitsverschiebungen Querschnitt 2

Aus den Einheitsverschiebungen und der Steifigkeit der Auflager errechnen sich nach Gl. (7.43) die Auflagerquerschnittswerte der beiden Querschnitte für den

I. Berechnungsschritt

$$\overline{\overline{A}}_{C,1,I} = \begin{pmatrix} 399600 & 1,665 \cdot 10^8 & 2,50 \cdot 10^8 & -1,04 \cdot 10^{11} \\ 1,665 \cdot 10^8 & 2,08 \cdot 10^{11} & 1,04 \cdot 10^{11} & -1,3 \cdot 10^{14} \\ 2,50 \cdot 10^8 & 1,04 \cdot 10^{11} & 3,12 \cdot 10^{11} & -1,3 \cdot 10^{14} \\ -1,04 \cdot 10^{11} & -1,3 \cdot 10^{14} & -1,3 \cdot 10^{14} & 1,626 \cdot 10^{17} \end{pmatrix}, \quad (7.46)$$

$$\overline{\overline{A}}_{C,2,I} = \begin{pmatrix} 133200 & 8,325 \cdot 10^7 & 0 & 0 \\ 8,325 \cdot 10^7 & 1,04 \cdot 10^{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (7.47)$$

Mit Hilfe der Gln. (3.59) bis (3.61) ergeben sich die Werte für die Transformationsmatrizen auf den Schwerpunkt nach Gl. (3.58). Die Auflagerquerschnittswertematrizen bezogen auf den jeweiligen Schwerpunkt errechnen sich entsprechend Gl. (3.63) zu

$${}^c\overline{\overline{A}}_{C,1,I} = \begin{pmatrix} 399600 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1,39 \cdot 10^{11} & 0 & -8,67 \cdot 10^{13} \\ 0 & 0 & 1,56 \cdot 10^{11} & -6,5 \cdot 10^{13} \\ 0 & -8,67 \cdot 10^{13} & -6,5 \cdot 10^{13} & 1,355 \cdot 10^{17} \end{pmatrix}, \quad (7.48)$$

$${}^c\overline{\overline{A}}_{C,2,I} = \begin{pmatrix} 133200 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5,2 \cdot 10^{10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (7.49)$$

Der Einheitsverschiebungsvektor für den Punkt 1006 ergibt sich entsprechend Gl. (3.62) zu

$$\overrightarrow{a}_{2,1006,I} = \begin{pmatrix} 1 \\ 833,3 \\ -625 \\ -260417 \end{pmatrix}. \quad (7.50)$$

Das globale Koordinatensystem mit dem Ursprungspunkt O wird in den Punkt O₁ gelegt. Der Bezug der lokalen Koordinatensysteme auf das globale Koordinatensystem hat bei der gegebenen Geometrie keine Auswirkungen auf die Auflagerquerschnittswerte. Somit errechnet sich die Gesamtauflagerquerschnittswertematrix nach Gl. (3.69) aus der Summe der Matrizen der Gln. (7.48) und (7.49) zu

$$\overline{\overline{A_{C,I}}} = \begin{pmatrix} 1,91 \cdot 10^{11} & 0 & -8,67 \cdot 10^{13} \\ 0 & 1,56 \cdot 10^{11} & -6,5 \cdot 10^{13} \\ -8,67 \cdot 10^{13} & -6,5 \cdot 10^{13} & 1,355 \cdot 10^{17} \end{pmatrix}. \quad (7.51)$$

Die Koordinaten des Schubmittelpunktes des Gesamtsystems ergeben sich nach den Gln. (3.71) und (3.72) zu X_{S,I} = -417 mm und Y_{S,I} = 455 mm.

Der Einheitsverschiebungsvektor für den Punkt 1006 und die Gesamtauflagerquerschnittswertematrix bezogen auf den Schubmittelpunkt folgen entsprechend Gl. (3.73) und (3.74) zu

$${}^s\overline{\overline{A_{C,I}}} = \begin{pmatrix} 1,91 \cdot 10^{11} & 0 & 0 \\ 0 & 1,56 \cdot 10^{11} & 0 \\ 0 & 0 & 6,89 \cdot 10^{16} \end{pmatrix}, \quad (7.52)$$

$${}^s\overrightarrow{a_{2,1006,I}} = \begin{pmatrix} 833,3 \\ -625 \\ 378723 \end{pmatrix}. \quad (7.53)$$

Mit M_x = - 2,5 · 10⁷ Nmm und M_ω = 1,04 · 10¹⁰ Nmm² folgt der Vektor ${}^s\overrightarrow{S_{\sigma}}$ nach Gl. (3.45) zu

$${}^s\overrightarrow{S_{\sigma}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2,5 \cdot 10^7 \\ -1,04 \cdot 10^{10} \end{pmatrix}. \quad (7.54)$$

Damit können die Auflagerreaktionen nach Gl. (7.44) errechnet werden. Für den Punkt 1006 ergibt sich beispielsweise

$$F_{V,1006,I} = \frac{-2,5 \cdot 10^7}{1,56 \cdot 10^{11}} \cdot (-625) \cdot 66600 - \frac{1,04 \cdot 10^{10}}{6,89 \cdot 10^{16}} \cdot 378723 \cdot 66600 = 2863 \text{ N}. \quad (7.55)$$

Somit ist für das Auflager im Punkt 1006 die Bedingung 1 aus Kap. 7.3 nicht erfüllt. Die angenommene Steifigkeit eines Druckauflagers ist durch die Steifigkeit eines Zugaufagers im Punkt 1006 zu ersetzen. Des Weiteren treten an den Punkten 1001, 1013 und 1101 Zugkräfte auf. Auch hier wird für den zweiten Berechnungsschritt die Steifigkeit des Zugaufagers K_t angenommen.

Im II. Berechnungsschritt ergibt sich somit die Gesamtauflagerquerschnittswertematrix

$$\overset{s}{\underset{\text{A}_{c,II}}{A}} = \begin{pmatrix} 8,19 \cdot 10^{10} & 0 & 0 \\ 0 & 2,18 \cdot 10^{10} & 0 \\ 0 & 0 & 1,65 \cdot 10^{16} \end{pmatrix} \quad (7.56)$$

und der Einheitsverschiebungsvektor für den Punkt 1006

$$\overset{s}{\underset{a_{2,1006,II}}{a}} = \begin{pmatrix} 833,3 \\ -1162,7 \\ 882906 \end{pmatrix}. \quad (7.57)$$

Der Schubmittelpunkt im II. Berechnungsschritt hat damit die Koordinaten $X_{S,II} = -417$ mm und $Y_{S,II} = 1058,5$ mm.

Da die X-Koordinate des Schubmittelpunktes im I. und II. Berechnungsschritt gleich ist, bleibt der Lastvektor bei der gegebenen Einwirkung erhalten. Für den Punkt 1006 ergibt sich im II. Berechnungsschritt

$$F_{V,1006,II} = \frac{-2,5 \cdot 10^7}{2,18 \cdot 10^{10}} \cdot (-1162,7) \cdot 5000 - \frac{1,04 \cdot 10^{10}}{1,65 \cdot 10^{16}} \cdot 882906 \cdot 5000 = 3884 \text{ N}. \quad (7.58)$$

Dies entspricht dem Ergebnis der FE-Analyse bei Vernachlässigung der Schubverformungen. Sollten sich durch eine Veränderung des Lastvektors im II. Berechnungsschritt gegenüber dem I. Berechnungsschritt veränderte Vorzeichen der vertikalen Auflagerreaktionen ergeben, müssen die entsprechenden Auflagersteifigkeiten gegebenenfalls erneut angepasst und die Berechnung wiederholt werden.

Wie in Kap. 7.3 beschrieben, wird die horizontale Beanspruchung der einzelnen Wandtafel ermittelt, indem ausgehend von einem freien Rand eines Querschnitts k jeweils der Schubfluss nach den Gln. (7.16) und (7.38) hinter den einzelnen Auflagerpunkten ermittelt und dieser über die Länge zwischen den Auflagerpunkten nach Gl. (7.13) integriert wird.

Die Steifigkeitsmomente hinter dem Punkt 1006 ergeben sich aus den Gln. (7.12) und (7.17) zu

$$S_{C,x,1004} = -1162 \cdot 5000 = -5,81 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{mm}}, \quad (7.59)$$

$$S_{C,\omega,1004} = 882906 \cdot 5000 = 4,41 \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{mm}} \cdot \text{mm}^2 \quad (7.60)$$

und damit der Schubfluss zu

$$T_{1004} = \frac{10000 \cdot (-5,81 \cdot 10^6)}{2,18 \cdot 10^{10}} + \frac{4,17 \cdot 10^6 \cdot 4,41 \cdot 10^9}{1,65 \cdot 10^{16}} = -1,55 \text{ N / mm}. \quad (7.61)$$

Die resultierende horizontale Beanspruchung der Wand 2 errechnet sich nach Gl. (7.13) zu

$$R_{H,2} = -1,55 \cdot 1250 = -1936 \text{ N}. \quad (7.62)$$

Dies entspricht dem in Bild 7-1b dargestellten Ergebnis der FE-Analyse.

Der Verschiebungsvektor $\overset{s}{\vec{U}}$ am Kopf der Wände ergibt sich aus der Verallgemeinerung der Gl. (7.10) zu

$$\overset{s}{\vec{U}} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \vartheta \end{pmatrix} = \overset{s}{\vec{C}}_B^{-1} \cdot \vec{F}, \quad (7.63)$$

mit \vec{F} nach Gl. (3.46) und der Steifigkeitsmatrix des Biegesystems $\overset{s}{\vec{C}}_B$ aus

$$\overset{s}{\vec{C}}_B = \frac{\overset{s}{\vec{A}}_c}{H^2}. \quad (7.64)$$

Die Kopfverformungen u_i und v_i der einzelnen Punkte der Wandtafel folgen mit Hilfe von Gl. (3.38) und (3.39).

Für das hier behandelte Beispiel ergibt sich

$$\overset{s}{\vec{C}}_B = \begin{pmatrix} 13104 & 0 & 0 \\ 0 & 3488 & 0 \\ 0 & 0 & 2,64 \cdot 10^9 \end{pmatrix} \quad (7.65)$$

und

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10000 \\ 417000 \end{pmatrix}. \quad (7.66)$$

Der Verschiebungsvektor errechnet sich somit zu

$$\vec{s}_U = \begin{pmatrix} 0 \\ 2,87 \\ 0,001579 \end{pmatrix}. \quad (7.67)$$

Die Verschiebung des Punktes 5 ergibt sich somit beispielsweise zu

$$u_5 = 0 - 0,001579 \cdot (-1059,5) = 1,67 \text{ mm}, \quad (7.68)$$

$$v_5 = 2,87 + 0,001579 \cdot 1667 = 5,5 \text{ mm}. \quad (7.69)$$

Dies entspricht den Ergebnissen des FE-Modells.

7.6 Berücksichtigung der Biege- und Schubverformungen

Wie in Kap. 7.1 beschrieben, kann das Tragverhalten bei gleichzeitiger Berücksichtigung der Biege- und Schubsteifigkeit nicht durch einfache Addition der Einzelergebnisse abgeschätzt werden. Dies wäre nur möglich, wenn das Verformungsverhalten des Biege- und Schubsystems gleich wäre oder wenn das System, wie z. B. bei der U-Stellung in Kap. 6.3.2, statisch bestimmt ist. Mit Hilfe des in Kap. 7.5 vorgestellten Verfahrens kann das Tragverhalten eines beliebigen Aussteifungssystems unter Vernachlässigung der Schubverformungen beschrieben werden. Dies ist für den allgemeinen Fall, wie in Kap. 7.3 gezeigt, aufgrund der unterschiedlichen Zug- und Drucksteifigkeit der Auflager mit erheblichem Aufwand verbunden. Daher werden für die Betrachtungen in diesem Kapitel die Steifigkeitswerte verwendet, wie sie sich für den zweiten Iterationsschritt in Kap. 7.5 ergeben haben. Das Tragverhalten des Aussteifungssystems unter Vernachlässigung der Biegesteifigkeit kann mit Hilfe der bekannten Verfahren aus dem Holztafelbau nach Kap. 4.3 abgebildet werden. Die Steifigkeit der einzelnen Wand ergibt sich dann nach Gl. (4.1) zu $C_j = 2165 \text{ N/mm}$. Die globale Steifigkeitsmatrix hat die Form

$$\bar{C} = \begin{pmatrix} 6495 & 0 & -2706250 \\ 0 & 2165 & 0 \\ -2706250 & 0 & 3,38 \cdot 10^9 \end{pmatrix}. \quad (7.70)$$

Das Tragverhalten des Gesamtsystems kann nicht durch einfache Addition der Einzelergebnisse abgeschätzt werden, weil sich im Biege- und Schubsystem der U+I-Stellung unterschiedliche Schubmittelpunkte ausbilden. Der Schubmittelpunkt des Biegesystems liegt nach Kap. 7.5 im Punkt $X_{S,B} = -417 \text{ mm}$ und $Y_{S,B} = 1058,5 \text{ mm}$, wie in Bild 7-6a dargestellt.

Der Schubmittelpunkt des Schubsystems lässt sich aus der Steifigkeitsmatrix nach Gl. (7.70) mit Hilfe der Gln. (3.71) und (3.72) ermitteln. Er ergibt sich, wie aus Bild 7-6b ersichtlich, zu $X_{S,S} = 0$ mm und $Y_{S,S} = 416,7$ mm. Bei gleichzeitiger Berücksichtigung der Biege- und Schubsteifigkeit des System, stellt sich ein Schubmittelpunkt in Abhängigkeit beider Steifigkeiten ein. Zur Ermittlung dieses Schubmittelpunktes der U+1-Stellung müssen für die einzelnen Querschnitte k die Steifigkeitsmatrizen $\overline{C}_{B,S,k}$ gebildet werden, in denen die Schub- und Biegesteifigkeit berücksichtigt sind. Sie lassen sich mit Hilfe des Federgesetzes ermitteln:

$$\overline{C}_{B,S,k}^{-1} = \overline{C}_{B,k}^{-1} + \overline{C}_{S,k}^{-1}, \quad (7.71)$$

mit $\overline{C}_{B,k}$, der Steifigkeitsmatrix des Biegesystems entsprechend Gl. (7.64) mit

$$\overline{C}_{B,k} = \frac{{}^c \overline{A}_{C,k}}{H^2} \quad (7.72)$$

und $\overline{C}_{S,k}$, der Steifigkeitsmatrix des Schubsystems nach den Gln. (4.1) und (4.3).

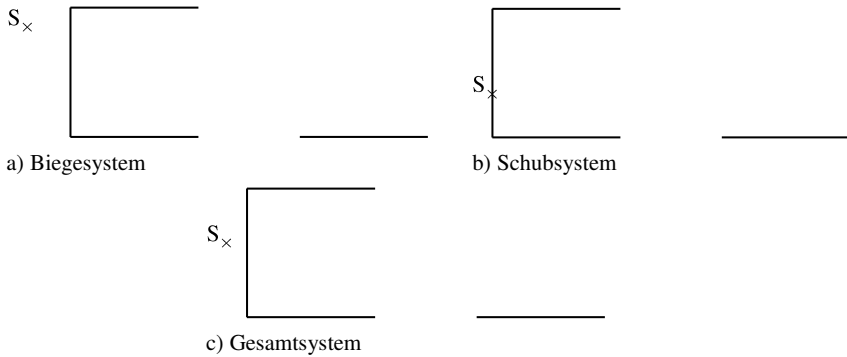


Bild 7-6 : Lage des Schubmittelpunktes bei der U+1-Stellung

Für die hier betrachtete U+1-Stellung ergeben sich für das Biegesystem die Auflagerquerschnittswerte der beiden Querschnitte zu

$${}^c \overline{A}_{C,1} = \begin{pmatrix} 7,46 \cdot 10^{10} & 0 & -8,67 \cdot 10^{13} \\ 0 & 2,18 \cdot 10^{10} & -9,08 \cdot 10^{12} \\ -8,67 \cdot 10^{13} & -9,08 \cdot 10^{12} & 1,12 \cdot 10^{17} \end{pmatrix}, \quad (7.73)$$

$${}^c \overline{A}_{C,2} = \begin{pmatrix} 7,27 \cdot 10^9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (7.74)$$

und damit nach Gl. (7.72) die Steifigkeitsmatrizen des Biegesystems

$$\overline{C_{B,1}} = \begin{pmatrix} 11933 & 0 & -1,39 \cdot 10^7 \\ 0 & 3488 & -1453367 \\ -1,39 \cdot 10^7 & -1453367 & 1,79 \cdot 10^{10} \end{pmatrix}, \quad (7.75)$$

$$\overline{C_{B,2}} = \begin{pmatrix} 1163 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (7.76)$$

Die Steifigkeitsmatrizen des Schubsystems der beiden Querschnitte ergeben sich zu

$$\overline{C_{S,1}} = \begin{pmatrix} 4330 & 0 & -2706250 \\ 0 & 2165 & 0 \\ -2706250 & 0 & 3,38 \cdot 10^9 \end{pmatrix}, \quad (7.77)$$

$$\overline{C_{S,2}} = \begin{pmatrix} 2165 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (7.78)$$

Die Steifigkeitsmatrizen der beiden Querschnitte bei Berücksichtigung der Schub- und Biegesteifigkeit errechnen sich nach Gl. (7.71) zu

$$\overline{C_{B,S,1}} = \begin{pmatrix} 2457 & -234,6 & -2248597 \\ -234,6 & 1259 & -85644 \\ -2248597 & -85644 & 2,84 \cdot 10^9 \end{pmatrix}, \quad (7.79)$$

$$\overline{C_{B,S,2}} = \begin{pmatrix} 756 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (7.80)$$

und damit die Gesamtsteifigkeitsmatrix der U+1-Stellung zu

$$\overline{C_{B,S}} = \overline{C_{B,S,1}} + \overline{C_{B,S,2}} = \begin{pmatrix} 3213 & -234,6 & -2248597 \\ -234,6 & 1259 & -85644 \\ -2248597 & -85644 & 2,84 \cdot 10^9 \end{pmatrix}. \quad (7.81)$$

Der Schubmittelpunkt liegt nach den Gln. (3.71) und (3.72) im Punkt $X_{S,1} = -201$ mm und $Y_{S,1} = 714$ mm, wie in Bild 7-6c dargestellt. Es bildet sich somit ein Schubmittelpunkt aus, der zwischen den Schubmittelpunkten des Biege- und Schubsystems liegt. Die so ermittelte Lage des Schubmittelpunktes lässt sich durch das FE-Modell bestätigen. Bei Lasteinleitung in diesem Punkt kommt es zu keiner Verdrehung der Deckenscheibe.

Die Steifigkeitsmatrix bezogen auf den Schubmittelpunkt lässt sich mit Hilfe der Transformationsmatrix nach Gl. (3.70) ermitteln,

$${}^s\overline{\mathbf{C}}_{B,S} = \begin{pmatrix} 3213 & -234,6 & 0 \\ -234,6 & 1259 & 0 \\ 0 & 0 & 1,21 \cdot 10^9 \end{pmatrix}. \quad (7.82)$$

Die Steifigkeitsmatrix zeigt, dass es bei gleichzeitiger Berücksichtigung der Schub- und Biegesteifigkeit zu einer Verdrehung des Hauptachsensystems kommt, da das Flächenzentrifugalmoment nicht mehr gleich Null ist. Es kommt somit durch eine Beanspruchung in y-Richtung zu Verschiebungen in x-Richtung.

Für die untersuchte Einwirkung und damit den Lastvektor

$$\vec{\mathbf{F}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10000 \\ 201000 \end{pmatrix} \text{ folgt der Verschiebungsvektor}$$

$${}^s\vec{\mathbf{U}} = \begin{pmatrix} 0,588 \\ 8,05 \\ 0,001658 \end{pmatrix}.$$

Die Verschiebung des Punktes 5 ergibt sich somit zu

$$u_5 = 0,588 - 0,001658 \cdot (-714) = 1,77 \text{ mm},$$

$$v_5 = 8,04 + 0,001658 \cdot 1451 = 10,44 \text{ mm}.$$

Dies entspricht den Ergebnissen des FE-Modells.

Um aus dem auf den Schubmittelpunkt des Gesamtsystem bezogenen Verschiebungsfeld

${}^s\vec{\mathbf{U}}$ die horizontale Beanspruchung der einzelnen Wandtafel zu ermitteln, werden zunächst die lokalen, auf die Ursprungspunkte O_k bezogenen Verschiebungsfelder ${}^o\vec{\mathbf{U}}_k$ der einzelnen Querschnitte berechnet:

$${}^o\vec{\mathbf{U}}_k = \overline{\mathbf{\Xi}}_k \cdot {}^s\vec{\mathbf{U}}, \quad (7.83)$$

mit der Transformationsmatrix

$$\overline{\mathbf{\Xi}}_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -{}^s\mathbf{Y}_{O,k} \\ 0 & 1 & {}^s\mathbf{X}_{O,k} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (7.84)$$

wobei ${}^S X_{O,k}$ und ${}^S Y_{O,k}$ die Koordinaten der Ursprungspunkte O_k vom Schubmittelpunkt des Gesamtsystems sind.

Für die hier behandelte U+I-Stellung lauten die Transformationsmatrizen der beiden Querschnitte

$$\overline{\Xi}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 714 \\ 0 & 1 & 201 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (7.85)$$

$$\overline{\Xi}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 714 \\ 0 & 1 & 2701 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (7.86)$$

und es folgen die Verschiebungsvektoren

$$\overset{o}{\overrightarrow{U}}_1 = \begin{pmatrix} 1,77 \\ 8,38 \\ 0,001658 \end{pmatrix}, \quad (7.87)$$

$$\overset{o}{\overrightarrow{U}}_2 = \begin{pmatrix} 1,77 \\ 12,53 \\ 0,001658 \end{pmatrix}. \quad (7.88)$$

Aus diesen Verschiebungsfeldern wird mit Hilfe der Steifigkeitsmatrizen der Gln. (7.79) und (7.80) jeweils ein Lastvektor ermittelt, für den der einzelne Querschnitt die vorher ermittelte Verschiebung aufweisen würde,

$$\overset{o}{\overrightarrow{F}}_k = \overline{C}_{B,S,k} \cdot \overset{o}{\overrightarrow{U}}_k. \quad (7.89)$$

Hier ergibt sich

$$\overset{o}{\overrightarrow{F}}_1 = \begin{pmatrix} -1341 \\ 10000 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (7.90)$$

$$\overset{o}{\overrightarrow{F}}_2 = \begin{pmatrix} 1341 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (7.91)$$

Diese Lastvektoren werden auf die Schubsysteme der Querschnitte nach den Gln. (7.77) und (7.78) angesetzt. Mit Hilfe des in Kap. 4.3 beschriebenen Verfahrens aus dem Holztafelbau

kann dann die horizontale Beanspruchung der einzelnen Wandtafel ermittelt werden. Die so ermittelten horizontalen Auflagerreaktionen entsprechen denen des FE-Modells in Bild 6-10.

Mit Hilfe von Gl. (5.4) können sehr einfach die vertikalen Auflagerreaktionen ermittelt werden.

Da das reine Biegesystem und das Gesamtsystem aus Biege- und Schubsystem unterschiedliche Schubmittelpunkte besitzen und somit bei gleicher horizontaler Einwirkung Torsionsbeanspruchungen mit unterschiedlichen Vorzeichen auftreten können, muss überprüft werden, ob die Richtung der ermittelten vertikalen Auflagerreaktionen mit der Richtung der in der Vorberechnung für das Biegesystem ermittelten, bzw. hier aus vorherigen Kapiteln angenommenen, Auflagerreaktion übereinstimmt. Sollte dies nicht der Fall sein, müssen die Querschnittswerte des Biegesystems mit den entsprechenden Auflagersteifigkeiten neu berechnet und somit der Rechenablauf neu gestartet werden. In Bild 7-7 ist der schematische Ablauf der Berechnung bei Berücksichtigung der Biege- und Schubsteifigkeit dargestellt.

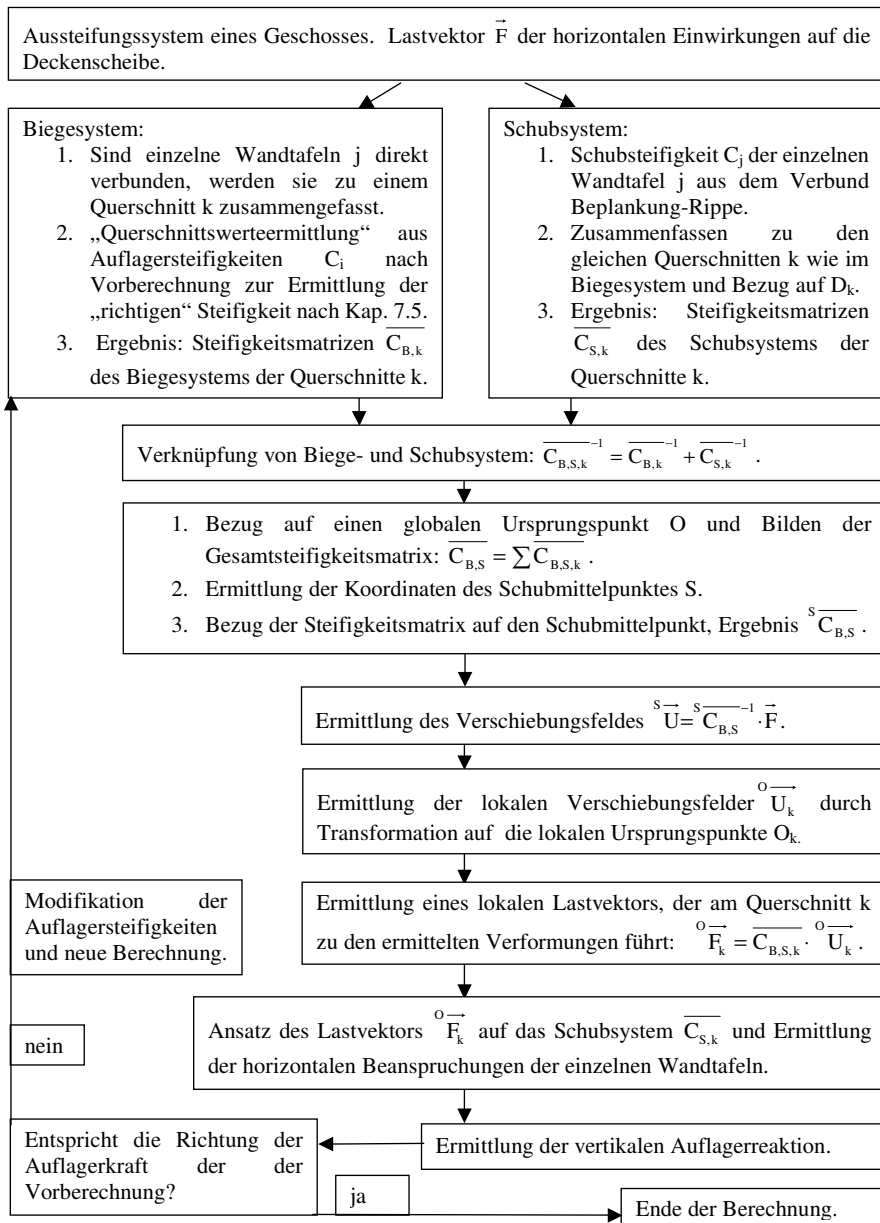


Bild 7-7 : Schematischer Ablauf der Berechnung bei Berücksichtigung der Schub- und Biegesteifigkeit

8 Einfluss der vertikalen Einwirkungen

8.1 Allgemeines

Wie bereits in Kap. 1 beschrieben, zeigen Kessel / Drücker (1996) und später Kessel / Dettmann (2000/1, 2000/2) den Einfluss vertikaler Einwirkungen auf die Verteilung der horizontalen Einwirkungen anhand von räumlichen Fachwerkmodellen. Eine analytische Erklärung des Tragverhaltens wird dabei nicht gegeben. Kessel / zur Kammer (2004, 2005) stellen eine Erweiterung des in Kap. 4.3 vorgestellten 2D-Modells zur Berücksichtigung dieser Effekte vor, dass sie als 2 ½ D-Modell bezeichnen. Die Zugauflager werden dort mit ihrer wahren Steifigkeit, die Druckauflager als starr angenommen. Die Auflagersteifigkeiten werden bei der Ermittlung der Wandsteifigkeit nach Gl. (4.1) berücksichtigt. Dabei wird für die einzelne Wand beachtet, ob sie durch vertikale Einwirkungen überdrückt ist und somit die Steifigkeit des Zugauflagers unter einer horizontalen Einwirkung nicht sofort aktiviert wird. Eine solche überdrückte Wandtafel wirkt im Gesamtsystem sehr viel steifer als eine Wand ohne Druckkräfte und wird somit anteilig höher beansprucht, so dass gilt

$$E (G \oplus Q) \neq E (G) \oplus E (Q). \quad (8.1)$$

In dem von Kessel / zur Kammer (2004) behandelten Beispiel kommt es zu über 60 % höheren horizontalen Beanspruchungen einer überdrückten Wand. Das vorgestellte Verfahren berücksichtigt nicht das Tragverhalten von Wandtafelgruppen in L-, T- und U-Form, deren einzelne Wände direkt miteinander verbunden sind.

8.2 Einzelne Wandtafel

Infolge von vertikalen Einzellasten, die an den Randrippen angreifen, kommt es bei dem in Kap. 5.1 vorgestellten FE-Modell einer Wandtafel zu keiner Beanspruchung der Verbindung Rippe-Beplankung und somit zu keiner Schubbeanspruchung der Beplankung. Auch bei der Ein-Element-Tafel ergibt sich infolge einer vertikalen Einzellast im Punkt 2, siehe Bild 5-6, keine Schubbeanspruchung der Wandtafel. Aus den Gleichgewichtsbedingungen resultiert, dass die vertikale Einwirkung nur von dem Auflager im Punkt 1 abgetragen wird. Damit kommt es bei der starr gelagerten Wandtafel zu keinen Verformungen infolge der vertikalen Einwirkung.

Bei Berücksichtigung der Steifigkeit der Auflager, ergeben sich die in Bild 8-1 dargestellten Verformungen. Dabei ist in Bild 8-1a die Verformungsfigur infolge einer Zugkraft $F_{z,2} = 10000 \text{ N}$ dargestellt. Die Verformungen sind wegen der geringen Steifigkeit des

Zugauflegers wesentlich größer als die infolge einer gleich großen Druckkraft in Bild 8-1b. Sie lassen sich leicht aus der Geometrie der Wandtafel und der Steifigkeit des Auflagers ermitteln. Die horizontale Verformung v_2 ergibt sich aus

$$v_2 = \frac{F_{v,1}}{C_1} \cdot \frac{H}{\ell}. \quad (8.2)$$

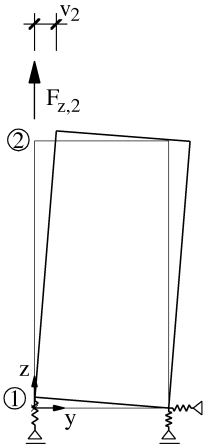
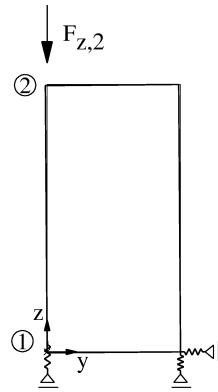
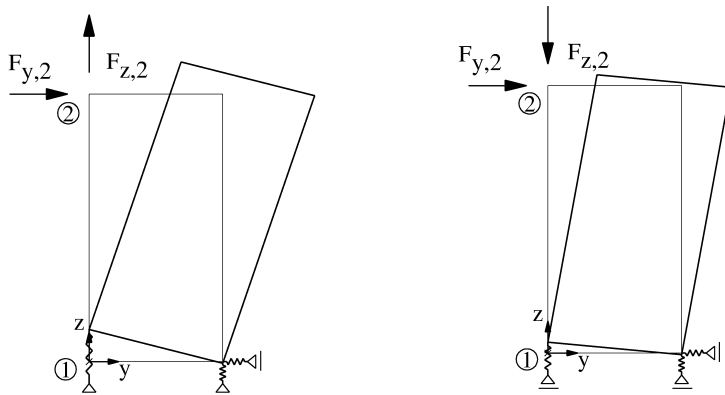
a) $F_{z,2} = 10000 \text{ N}$ b) $F_{z,2} = -10000 \text{ N}$

Bild 8-1 : Verformungsfigur einer Wandtafel mit steifen Auflagern unter vertikalen Einwirkungen

Bei gleichzeitiger Beanspruchung der Wandtafel mit einer horizontalen und einer vertikalen Einwirkung stellt sich die in Bild 8-2 dargestellte Verformung ein. Die Verformungen sind, wie in Bild 8-2a, durch einfache Interaktion der Einzelbetrachtungen zu ermitteln, wenn die Auflagerreaktionen infolge der einzelnen Einwirkungen die gleiche Richtung haben. Die horizontalen Verformungen ergeben sich dann aus den Gln. (5.20), (5.23) und (8.2). Haben die Auflagerreaktionen entgegengesetzte Richtungen, wie in dem Beispiel in Bild 8-2b, sind aufgrund der unterschiedlichen Steifigkeiten des Zug- und Druckauflagers zunächst die resultierenden Auflagerkräfte F_t und F_c zu ermitteln. Die horizontalen Verformungen ergeben sich dann aus Gl. (5.23) und

$$v_{2,c} = \left(\frac{F_t}{K_t} + \frac{F_c}{K_c} \right) \cdot \frac{H}{\ell}. \quad (8.3)$$



a) $F_{y,2} = F_{z,2} = 10000 \text{ N}$

b) $F_{y,2} = 10000 \text{ N}; F_{z,2} = -10000 \text{ N}$

Bild 8-2 : Verformungsfigur einfache Wandtafel mit steifen Auflagern unter horizontalen und vertikalen Einwirkungen

Die Untersuchungen der einzelnen Wandtafel haben gezeigt, dass infolge von vertikalen Einwirkungen keine Schubbeanspruchung der Wandtafel auftritt. Verformungen treten nur infolge von Biegeverformungen auf. Für die weiteren Untersuchungen zum Einfluss der vertikalen Einwirkungen wird daher zunächst auf die Berücksichtigung der Schubsteifigkeit der Wände verzichtet und mit dem reinen Biegesystem gearbeitet. Dies erleichtert, wie auch schon bei der Beanspruchung mit einer horizontalen Einwirkung, die analytische Beschreibung des Tragverhaltens. Der Einfluss der Schubsteifigkeit der Wände wird anschließend in Kap. 8.6 aufgezeigt.

8.3 U+1-Stellung ohne vertikale Verbindung der Wände

Zunächst wird die U+1-Stellung ohne Verbindung der Wände in den Berührungskanten und mit Berücksichtigung der Auflagersteifigkeiten betrachtet. Eine Beanspruchung der U+1-Stellung der Wände im Punkt 2 der Wand 1, also mit der selben Einwirkung wie die einzelne Wand in Kap. 8.2, hat keinen Einfluss auf das Tragverhalten der übrigen Wandtafeln. Wand 1 verhält sich wie die einzelne Wandtafel nach Bild 8-1a. Sie zwingt lediglich den übrigen Wände über die Deckenscheibe die horizontale Verformung senkrecht zu deren Scheibenebene auf.

Dass vertikale Einwirkungen jedoch auch ohne Verbindung der Wände einen großen Einfluss auf das räumliche Trag- und Verformungsverhalten der U+1-Stellung haben können, zeigt sich beispielsweise durch eine vertikale Einwirkung im Punkt 14, siehe Bild 6-8, der Wand 4. Bild 8-4 zeigt die Auflagerreaktionen der Wände infolge einer vertikalen Einwirkung $F_{z,14} = 10000 \text{ N}$ im Punkt 14. Es zeigt sich, dass die Wände 2 und 4 nicht unerhebliche horizontale Beanspruchungen und damit verbunden auch vertikale Auflagerreaktionen erhalten. Wie aus Bild 8-3 ersichtlich kommt es infolge der Auflagerverformung Wandtafeln zu einer Verdrehung der Deckenscheibe.

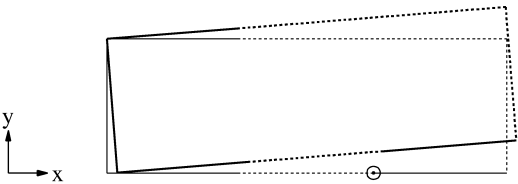


Bild 8-3 : Draufsicht der Verformungsfigur der U+1-Stellung ohne Verbindung in der U-Stellung; vertikaler Zugkraft im Punkt 14

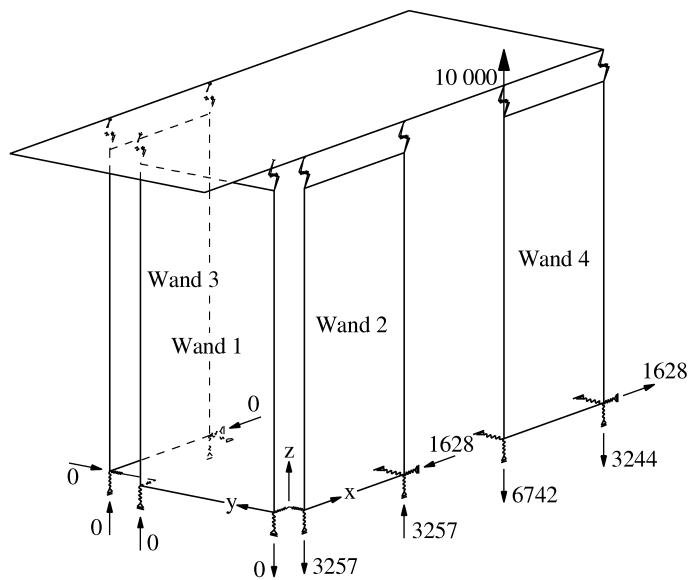


Bild 8-4 : Auflagerreaktionen infolge einer vertikalen Einwirkung $F_{z,14} = 10000 \text{ N}$, U+1-Stellung, keine Verbindung der Wände im U

8.4 U+1-Stellung mit starrer vertikaler Verbindung der Wände

In der U+1-Stellung mit starrer Verbindung der Wände beeinflusst die vertikale Einwirkung im Punkt 2 der Wand 1 auch das Tragverhalten der übrigen Wände. Es kommt zu einer horizontalen Beanspruchung der quer stehenden Wände 2 und 4. Wand 1 und 4 bleiben unbeanspruchung. Durch die Verformung der Wand 1 und ihrer starren Verbindung zur Wand 2 kommt es zu einer Verdrehung der Deckenscheibe. Die horizontale Verformung der Wand 1 wird, gegenüber der Verformung dieser Wand ohne Verbindung zu den restlichen Wänden in Kap. 8.3, mehr als halbiert.

Unter einer vertikalen Einwirkung $F_{z,14} = 10000 \text{ N}$ stellt sich ein vergleichbares Tragverhalten ein wie es in Kap. 8.3 beschrieben wurde. Einerseits verringern sich die Verformungen der Wandtafeln gegenüber der U+1-Stellung in Kap. 8.3. Andererseits vergrößert sich jedoch die horizontale Beanspruchung der Wände und damit verbunden die vertikalen Auflagerreaktionen, wie in Bild 8-5 dargestellt. Dieses zunächst widersinnig erscheinende Trag- und Verformungsverhalten ist durch die größere Steifigkeit der U-Stellung mit Verbindung begründet. Durch die größere Steifigkeit kommt es zwar zu kleineren Verformungen, aber auch zu größeren Zwängungskräften.

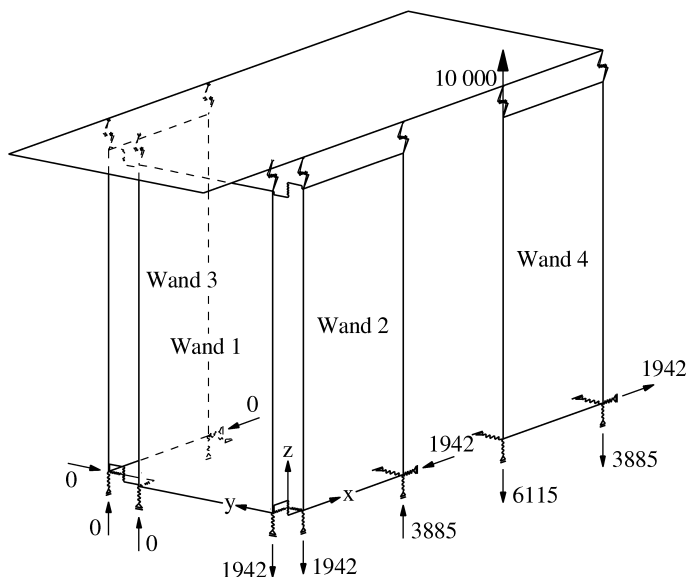


Bild 8-5 : Auflagerreaktionen infolge einer vertikalen Einwirkung $F_{z,14} = 10000 \text{ N}$, U+1-Stellung, starre Verbindung der Wände im U

Wie in Bild 8-6 dargestellt, ergeben sich infolge einer vertikalen Druckkraft im Punkt 14 im Vergleich zu einer Zugkraft in diesem Punkt wesentlich kleinere horizontale Beanspruchungen der Wände. Die Beanspruchungen sind außerdem in die entgegengesetzte Richtung orientiert.

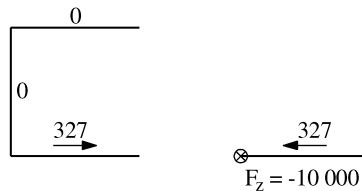


Bild 8-6 : Horizontale Auflagerreaktionen infolge $F_{z,14} = -10000 \text{ N}$

Schon die Betrachtung der einzelnen Wandtafel unter gleichzeitiger horizontaler und vertikaler Einwirkung in Kap. 8.2 hat gezeigt, dass die Ergebnisse nicht immer durch einfach Addition der Einzelergebnisse zu ermitteln sind. In Bild 8-7 sind die horizontalen Auflagerreaktionen der U+1-Wandstellung infolge einer horizontalen Einwirkung im Punkt 202, wie bei den Untersuchungen in Kap. 6, und einer gleichzeitig wirkenden vertikalen Einwirkung im Punkt 14 dargestellt. Bild 8-7a zeigt, dass sich bei einer vertikalen Zugkraft die horizontalen Beanspruchungen annähernd aufheben. Dies ergibt sich auch aus der Addition der Einzelergebnisse nach Bild 7-1b und Bild 8-5. Wie in Bild 8-7b zu erkennen, bewirkt der Ansatz einer vertikalen Druckkraft sehr große horizontale Beanspruchungen der Wände. Eine Betrachtung der Einzelergebnisse nach Bild 7-1b und Bild 8-6 deutet zwar auf eine Erhöhung der horizontalen Beanspruchungen durch die gleichzeitige Berücksichtigung der vertikalen Druckkraft hin, weil die beiden Beanspruchungen gleich gerichtet sind, jedoch sind die in Bild 8-7b dargestellten Ergebnisse nicht aus der Summe der Einzelergebnisse zu ermitteln. Gegenüber der einfachen Addition ergeben sich über 40 % größere horizontale Beanspruchungen. Diese Beispiele zeigen den großen Einfluss der vertikalen Einwirkung auf das Tragverhalten des Aussteifungssystems.

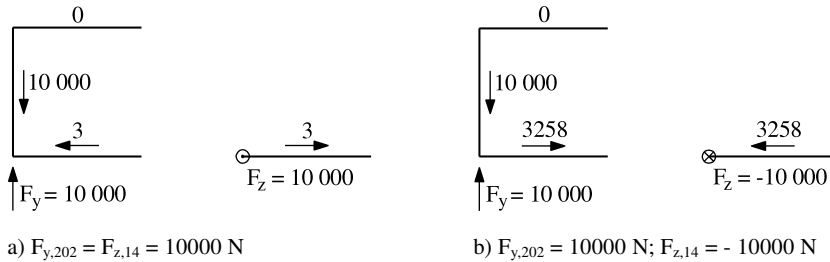


Bild 8-7 : Horizontale Auflagerreaktionen infolge gleichzeitiger horizontaler und vertikaler Einwirkung

Bild 8-8 zeigt die horizontalen Beanspruchungen der Wände infolge der gleichzeitigen horizontalen und vertikalen Einwirkung, wenn keine Verbindung der Wände in der U-Stellung vorhanden ist. Die horizontalen Beanspruchungen sind nur noch etwa 1/10 so groß wie bei verbundenen Wänden nach Bild 8-7b. Der Vergleich zeigt den großen Einfluss, den die vertikalen Verbindung der Wände auf das Tragverhalten des Gesamtsystems haben kann.

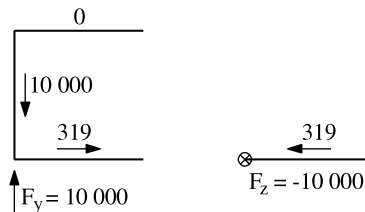


Bild 8-8 : Horizontale Auflagerreaktionen infolge $F_{y,202} = 10\,000$ N und $F_{z,14} = -10\,000$ N, keine Verbindung der Wände in der U-Stellung

8.5 Analytische Beschreibung des Tragverhaltens

Das Trag- und Verformungsverhalten lässt sich mit Hilfe der in Kap. 7 vorgestellten Verfahren erklären. Wie z. B. von Wlassow (1965) für den Stab beschrieben, treten durch die nicht in der Schwerachse des Querschnitts angreifende vertikale Einwirkung Biegemomente auf. Die Biegemomente ergeben sich aus dem Gleichgewicht am Querschnitt zu

$$M_x = \sum_i F_{z,i} \cdot c_{y_{ki}}, \quad (8.4)$$

$$M_y = -\sum_i F_{z,i} \cdot c_{x_{ki}}, \quad (8.5)$$

wobei $c_{x_{ki}}$ und $c_{y_{ki}}$ die Koordinaten des Punktes i im Querschnitt k sind. Außerdem kommt es infolge von vertikalen Einwirkungen zu einem Wölbmoment, das sich allgemein ergibt aus

$$M_{\omega} = -\sum_i F_{z,i} \cdot {}^s\omega_i, \quad (8.6)$$

wobei ${}^s\omega_i$ die Einheitsverwölbung des Punktes i bezogen auf den Schubmittelpunkt des Gesamtquerschnitts ist. Die Biegemomente und das Wölbmoment sind über die Höhe der Wände konstant.

Um nicht die in Kap. 7.5 vorgestellte Vorberechnung durchführen zu müssen, werden für die analytische Betrachtung der in Kap. 8.4 vorgestellten U+I-Stellung unter einer vertikalen Einwirkung $F_{z,14} = 10000 \text{ N}$ die Auflagersteifigkeiten entsprechend den Ergebnissen des FE-Modells angenommen. Es ergibt sich somit

$$C_{1001} = C_{1013} = C_{1014} = C_{1101} = 5000 \text{ N/mm}$$

und

$$C_{1004} = C_{1006} = C_{1008} = C_{1104} = 66600 \text{ N/mm}.$$

Gemäß dem in Kap. 7.5 vorgestellten Verfahren ergibt sich die Auflagerquerschnittswertematrix bezogen auf den Schubmittelpunkt zu

$${}^s\overline{A}_C = \begin{pmatrix} 1,12 \cdot 10^{11} & -4,64 \cdot 10^{10} & 0 \\ -4,64 \cdot 10^{10} & 8,65 \cdot 10^{10} & 0 \\ 0 & 0 & 2,18 \cdot 10^{16} \end{pmatrix}.$$

Der Schubmittelpunkt liegt im Punkt $X_S = -952 \text{ mm}$ und $Y_S = 998 \text{ mm}$.

Der Einheitsverschiebungsvektor im Lasteinleitungspunkt 14 ergibt sich zu

$${}^s\overrightarrow{a}_{2,14} = \begin{pmatrix} -625 \\ 0 \\ -623936 \end{pmatrix}.$$

Aus den Gln. (8.4) bis (8.6) resultieren die Momente

$$M_y = - (10000 \cdot (-625)) = 6250000 \text{ Nmm}$$

und

$$M_{\omega} = - (10000 \cdot (-623936)) = 6,24 \cdot 10^9 \text{ Nmm}^2$$

und damit der Vektor der normalspannungsresultierenden Schnittgrößen nach Gl. (3.45)

$${}^s\overrightarrow{S}_{\sigma} = \begin{pmatrix} -6250000 \\ 0 \\ -6,24 \cdot 10^9 \end{pmatrix}.$$

Die vertikalen Auflagerreaktionen folgen aus Gl. (7.44).

Für den Punkt 1006 ergibt sich beispielsweise der Einheitsvektor zu

$$\vec{s} \xrightarrow{\vec{a}_{2,1006}} = \begin{pmatrix} 647,6 \\ -903,6 \\ 162908 \end{pmatrix}$$

und damit die vertikale Auflagerreaktion zu

$$\begin{aligned} F_{V,1006} &= \left(-\frac{{}^0A_{YV} \cdot {}^0M_V + {}^0A_{XV} \cdot {}^0M_X \cdot {}^0x_{ki} + \frac{{}^0A_{XX} \cdot {}^0M_X + {}^0A_{XY} \cdot {}^0M_Y \cdot {}^0y_{ki} - \frac{{}^S M_{\omega} \cdot {}^S \omega_{ki}}{{}^S A_{\omega\omega}}}{D} \right) \cdot C_i \\ &= \left(-\frac{8,65 \cdot 10^{10} \cdot 6250000}{1,12 \cdot 10^{11} \cdot 8,65 \cdot 10^{10} - (-4,64 \cdot 10^{10})^2} \cdot 647,6 \right. \\ &\quad + \frac{-4,64 \cdot 10^{10} \cdot 6250000}{1,12 \cdot 10^{11} \cdot 8,65 \cdot 10^{10} - (-4,64 \cdot 10^{10})^2} \cdot (-903,6) \\ &\quad \left. - \frac{6,24 \cdot 10^9}{2,18 \cdot 10^{16}} \cdot 162908 \right) \cdot 66600 \\ &= -3885 \text{ N.} \end{aligned}$$

Dies entspricht dem Ergebnis des FE-Modells nach Bild 8-5.

Für den durch die vertikale Einwirkung direkt beanspruchten Querschnitt ergeben sich die vertikalen Auflagerreaktionen aus der Summe der Reaktionen infolge des Vektors \vec{s}_σ und den Reaktionen infolge der, in den Schwerpunkt des Querschnitts verschobenen, vertikalen Einwirkung.

Zur Ermittlung der horizontalen Verformungen wird aus dem Vektor \vec{s}_σ durch Division durch die Höhe H des Querschnitts ein horizontaler Lastvektor

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} 2500 \\ 0 \\ 2495744 \end{pmatrix} \text{ gebildet.}$$

Damit resultiert der Verformungsvektor aus Gl. (7.64) zu

$$\vec{s}_U = \begin{pmatrix} 0,180 \\ 0,096 \\ 0,000715 \end{pmatrix}.$$

Die Verschiebungen des Punktes 5 ergeben sich zu

$$u_5 = 0,18 - 0,000715 \cdot (-998) = 0,89 \text{ mm}$$

$$v_5 = 0,096 + 0,000715 \cdot 2202 = 1,67 \text{ mm,}$$

was den Ergebnissen des FE-Modells entspricht.

Die Ermittlung der horizontalen Beanspruchung aus dem Verschiebungsfeld $\overset{s}{\vec{U}}$ kann dann wie in Kap. 7.5 beschrieben erfolgen.

Im Allgemeinen ist das Aussteifungssystem nicht wie in diesem Beispiel durch ein einzelne vertikale Einwirkung auf einer Wandtafel belastet, sondern jede Wandtafel ist durch vertikale Einwirkungen aus ihrem Eigengewicht oder aus Beanspruchungen darüber liegender Bauteile beansprucht. Die Steifigkeit der Auflager wird entsprechend dieser vertikalen Einwirkungen angenommen. Die vertikalen Beanspruchungen infolge der horizontalen Einwirkungen können den vorhandenen vertikalen Einwirkungen entgegen wirken. Kommt es dadurch zu einer Umkehrung des Vorzeichens der Auflager, ändert sich auch die Steifigkeit des Auflagers und damit die Steifigkeit und das Tragverhalten des gesamten Aussteifungssystems. Die Ermittlung der Verteilung der horizontalen Einwirkungen kann dann nur noch iterativ erfolgen. Kessel / zur Kammer (2004, 2005) beschrieben das dann erforderliche Vorgehen.

8.6 U+1-Stellung unter Berücksichtigung der Schubsteifigkeit der Wände

Durch die Berücksichtigung der Schubsteifigkeit der Wände nach Gl. (5.21) werden die, in Kap. 8.3 und 8.4 ermittelten, horizontalen Beanspruchungen um 40-50 % reduziert. So ergibt sich beispielsweise infolge der gleichzeitigen Einwirkungen $F_{y,202} = 10000 \text{ N}$ und $F_{z,14} = -10000 \text{ N}$ für die Wand 4 nur noch eine horizontale Beanspruchung $F_{H,X,16} = 1920 \text{ N}$, siehe auch Bild 8-7b. Dieser Einfluss kann analytisch mit Hilfe des in Kap. 7.6 vorgestellten Verfahrens berücksichtigt werden. Auf die Darstellung soll hier verzichtet werden.

9 Anwendung auf den mehrgeschossigen Holztafelbau

9.1 Allgemeines

Die Anwendbarkeit des vorgestellten Rechenverfahrens im mehrgeschossigen Holztafelbau soll dadurch überprüft werden, dass mit Hilfe der entwickelten Ein-Element-Tafel das Tragverhalten eines zweigeschossigen Aussteifungssystems in U+1-Stellung, wie es in Bild 9-1 dargestellt ist, untersucht wird. Zunächst wird das reine Schub- und das reine Biegesystem und anschließend das Aussteifungssystem unter Berücksichtigung beider Steifigkeiten betrachtet. Es werden jeweils die 4 Lastfälle $F_{y,2202} = 10000 \text{ N}$, $F_{y,202} = 10000 \text{ N}$, $F_{z,14} = -10000 \text{ N}$ und die gleichzeitige Wirkung von $F_{y,2202}$ und $F_{z,14}$ untersucht.

Die Wandtafeln des oberen Geschosses sind vertikal mit den entsprechenden Steifigkeiten direkt mit den darunter stehenden Wandtafeln verbunden. Entsprechend der Lagerung in der eingeschossigen Betrachtung sind die Fußpunkte der Wandtafeln des oberen Geschosses in horizontaler Richtung starr mit der unteren Decke verbunden.

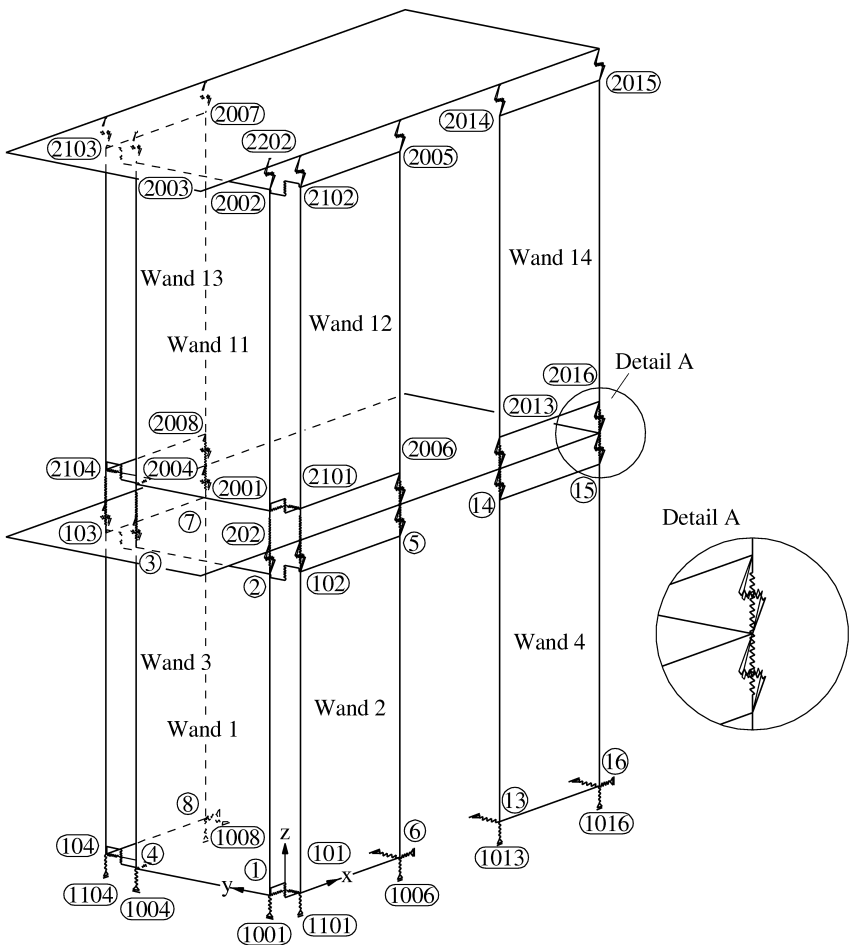


Bild 9-1 : Zweigeschossiges Aussteifungssystem in U+1-Stellung

9.2 Schubsystem

Im Schubsystem wird die Nachgiebigkeit der vertikalen Auflager im unteren Geschoss und die vertikale Verbindung der Geschosse untereinander vernachlässigt, also ihre Steifigkeit als starr angenommen.

Infolge der horizontalen Einwirkung $F_{y,2202}$ kommt es im Schubsystem lediglich zu Beanspruchungen der Wände 1 und 11 und deren vertikalen Auflager bzw. Verbindungen untereinander und infolge von $F_{y,202}$ nur zu Beanspruchungen der Wand 1 und ihrer vertikalen Auflager. Das obere Geschoss bleibt unbeansprucht. Auf Grund der vertikalen Einwirkung $F_{z,14}$ treten keine Schubbeanspruchungen der Wände auf. Damit beeinträchtigt $F_{z,14}$ auch nicht das Tragverhalten der Wandtafeln bei der kombinierten Einwirkung mit $F_{y,2202}$, so dass auch dort nur die Wände 1 und 11 beansprucht werden.

Das Tragverhalten des Aussteifungssystems kann mit Hilfe des in Kap. 4.3 vorgestellten Verfahrens beschrieben werden. Das Aussteifungssystem wird dazu geschossweise von oben nach unten betrachtet. Die horizontalen und vertikalen Reaktionen aus dem oberen Geschoss werden als Einwirkungen auf das untere Geschoss angesetzt. Die vertikalen Einwirkungen haben dabei keinen Einfluss auf das Tragverhalten, werden aber für die Ermittlung der Auflagerreaktionen im unteren Geschoss benötigt. Das Verfahren liefert auch richtige Ergebnisse, wenn die einzelnen Wandtafeln unterschiedliche Schubsteifigkeiten besitzen oder in den einzelnen Geschossen unterschiedliche Grundrisse vorhanden sind.

Die Gesamtverformungen des oberen Geschosses ergeben sich aus der Summe der Verformungen der beiden Geschosse.

9.3 Biegesystem

Im Biegesystem wird die Schubsteifigkeit der Wandtafeln vernachlässigt. Für die Steifigkeit der vertikalen Verbindung der Wandtafeln vom oberen zum unteren Geschoss werden zunächst die gleichen Steifigkeiten wie für die Auflager im unteren Geschoss angenommen, obwohl die Steifigkeit durch die zweite Zugankerkonstruktion am Kopf der Wandtafeln des unteren Geschosses nur etwa halb so groß sein dürfte. Die Verteilung von Zug- und Druckauflager wird wie in Kap. 7.5 angenommen.

Die horizontale Einwirkung $F_{y,2202}$ führt in beiden Geschossen zu den gleichen Schubbeanspruchungen der Wandtafeln wie bei der eingeschossigen Betrachtung in Kap. 7.5. Die Beanspruchung der vertikalen Verbindung zwischen den beiden Geschossen entspricht den Auflagerreaktionen der eingeschossigen Betrachtung. Die Auflagerreaktionen im unteren Geschoss sind entsprechend doppelt so groß. Infolge von $F_{y,202}$ kommt es nur zu Beanspruchungen des unteren Geschosses. Die Ergebnisse entsprechen denen der eingeschossigen Betrachtung. Auch durch die vertikale Einwirkung $F_{z,14}$ kommt es nur zu

Beanspruchungen des unteren Geschosses. Die Ergebnisse entsprechen denen in Kap. 8.4. Das Tragverhalten des zweigeschossigen Aussteifungssystems kann mit Hilfe des in Kap. 7.5 und 8.5 vorgestellten Verfahrens beschrieben werden. Das Aussteifungssystem wird dazu geschossweise von oben nach unten betrachtet. Die horizontalen und vertikalen Reaktionen aus dem oberen Geschoss werden als Einwirkungen auf das untere Geschoss angesetzt.

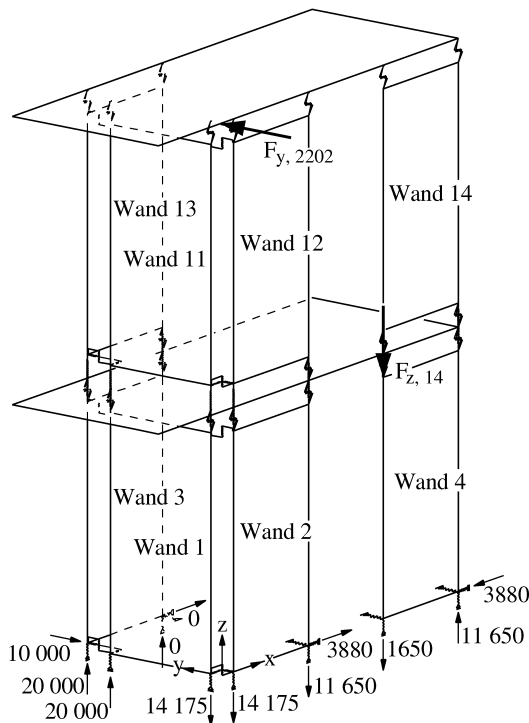


Bild 9-2 : Auflagerreaktionen des Biegesystems infolge einer gleichzeitigen horizontalen und vertikalen Einwirkung

Bei gleichzeitiger horizontaler und vertikaler Einwirkung $F_{y,2202}$ und $F_{z,14}$ entsprechen die Beanspruchungen des oberen Geschosses denen bei Betrachtung der eingeschossigen Situation in Kap. 7.5. Im unteren Geschoss kommt es im Vergleich zu der eingeschossigen Betrachtung unter gleichzeitiger Einwirkung in Kap. 8.4 zu größeren Schubbeanspruchungen der Wände und damit, wie in Bild 9-2 dargestellt, zu veränderten Auflagerreaktionen. Wie in Kap. 8.4 beschrieben, wird durch die vertikale Druckkraft die horizontale Steifigkeit der

Wand 4 erhöht, da das relativ weiche Zugauflager überdrückt bleibt. Außerdem kommt es zu zusätzlichen Biege- und Wölbmomenten. Für das mehrgeschossige Aussteifungssystem ergibt sich somit, dass die Wände 4 und 14 in den beiden Geschossen eine unterschiedliche Steifigkeit besitzen. Die unterschiedliche Steifigkeit in den Geschossen führt zu zusätzlichen horizontalen Beanspruchungen.

Der Effekt, dass es aufgrund unterschiedlicher Steifigkeiten in den Geschossen zu größeren Schubbeanspruchungen kommt, soll ohne den Einfluss einer vertikalen Einwirkung gezeigt werden, indem das Aussteifungssystem nur mit $F_{y,202} = 10000 \text{ N}$ beansprucht wird. Zunächst wird gleichmäßig in beiden Geschossen die horizontale Steifigkeit der Wände 4 und 14 erhöht, indem die Steifigkeit der vertikalen Verbindung der Geschosse zwischen den Punkten 2013 und 14 und die Steifigkeit des Zugaufagers im Punkt 1013 mit einer Steifigkeit $K_t = 20000 \text{ N/mm}$ angenommen wird. Die horizontale Beanspruchung der Wände 4 und 14 erhöhen sich dadurch von $F_{H,X} = 1940 \text{ N}$, vergleiche Bild 7-1b, auf $F_{H,X} = 2730 \text{ N}$. Die vertikalen Zugbeanspruchungen erhöhen sich entsprechend auf $F_{V,2013} = 5460 \text{ N}$ und $F_{V,1013} = 10920 \text{ N}$. Diese Ergebnisse ergeben sich auch bei einer geschossweisen Betrachtung entsprechend dem Verfahren aus Kap. 7.5. Wird nur im unteren Geschoss die Zugsteifigkeit im Punkt 1013 erhöht und die Steifigkeit von $K_t = 5000 \text{ N/mm}$ zwischen den Punkten 2013 und 14 beibehalten, bleiben die Beanspruchungen im oberen Geschoss wie bei der eingeschossigen Betrachtung mit $F_{H,X,2016} = 1940 \text{ N}$ und $F_{V,2013} = 3880 \text{ N}$ erhalten. Im unteren Geschoss erhöht sich die horizontale Beanspruchung auf $F_{H,X,16} = 3530 \text{ N}$ und die vertikale Beanspruchung auf $F_{V,1013} = 10920 \text{ N}$. Die vertikale Beanspruchung entspricht somit der bei gleichmäßig erhöhter Steifigkeit der Wände 4 und 14, während sich die horizontale Beanspruchung gegenüber dieser Betrachtung erhöht.

Die vertikalen Beanspruchungen $F_{V,2013}$ und $F_{V,1013}$ und die horizontale Beanspruchung $F_{H,X,2016}$ lassen sich aus der geschossweisen Betrachtung mit Hilfe des vorgestellten Verfahrens ermitteln. Aus dem Gleichgewicht an der Wand 4 in Bild 9-3 ergibt sich dann die im FE-Modell ermittelte erhöhte horizontale Beanspruchung $F_{H,X,16} = 3530 \text{ N}$.

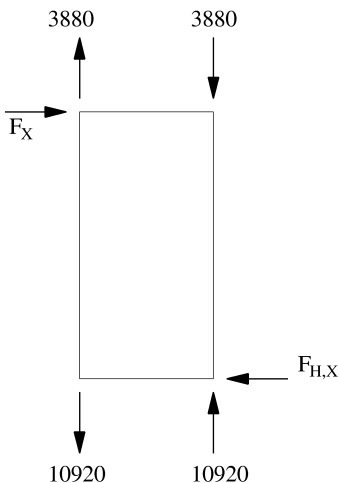


Bild 9-3 : Gleichgewicht an der Wand 4

Die Gesamtverformungen des oberen Geschosses resultieren nicht, wie noch im Schubsystem, aus der einfachen Addition der Einzelergebnisse der Geschosse. Durch die Auflagerverformungen im unteren Geschoss kommt es, wie in Bild 9-4 für die einfache Wandtafel verdeutlicht, zu einer Schiefstellung des oberen Geschosses und damit zu horizontalen Verformungen, auch wenn das obere Geschoss unbeanspruchte bleibt. Die Verformungen am Kopf des zweigeschossigen Aussteifungssystems infolge $F_{y,2202}$ sind damit viermal so groß wie bei einem eingeschossigen System.

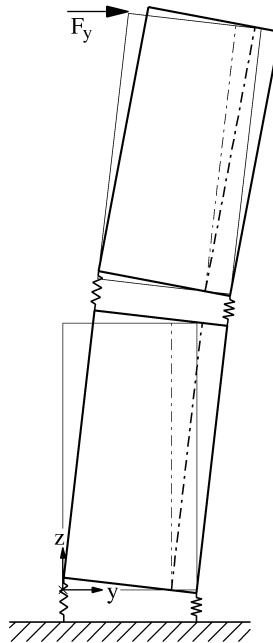


Bild 9-4 : Biegeverformungen zweier übereinander stehender Wandtafeln

9.4 Schub- und Biegesystem

Im Schub- und Biegesystem werden die Schubsteifigkeit und die Steifigkeiten der vertikalen Verbindungen zwischen den Geschossen bzw. der Auflager der Wandtafeln berücksichtigt. Die Steifigkeitswerte entsprechen denen bei Betrachtung der eingeschossigen Situation in Kap. 7.

Infolge der horizontalen Einwirkung $F_{y,2202}$ kommt es in den beiden Geschossen zu unterschiedlichen Schubbeanspruchungen der Wandtafeln. Für die Wand 14 ergibt sich $F_{H,X,2016} = 1790 \text{ N}$ und $F_{V,2013} = 3580 \text{ N}$. Im unteren Geschoss verringert sich die horizontale Beanspruchung auf $F_{H,X,16} = 1450 \text{ N}$. Die vertikale Beanspruchung beträgt $F_{V,1013} = 6470 \text{ N}$. Alle Beanspruchungen sind größer als bei der eingeschossigen Betrachtung nach Bild 6-10. Die Beanspruchungen aus dem FE-Modell sind weder durch eine geschossweise noch durch eine Gesamtbetrachtung mit Hilfe des vorgestellten Verfahrens zu ermitteln. Auch das Tragverhalten des FE-Modells unter der horizontalen Einwirkung $F_{y,202}$ zeigt, dass das vorgestellte Verfahren hier nicht anwendbar ist. Durch $F_{y,202}$ treten auch Beanspruchungen

des oberen Geschosses auf. Die horizontale Beanspruchung der Wand 4 des unteren Geschosses ist mit $F_{H,X,16} = 1080 \text{ N}$ geringer als bei einer eingeschossigen Betrachtung. Die vertikale Beanspruchung ist mit $F_{V,1013} = 2920 \text{ N}$ größer. Auch infolge der vertikalen Einwirkung $F_{z,14}$ wird das obere Geschoss beansprucht. Die horizontalen und vertikalen Beanspruchungen im unteren Geschoss sind im Vergleich zu der eingeschossigen Betrachtung geringer. Bei gleichzeitiger horizontaler und vertikaler Einwirkung $F_{y,2202}$ und $F_{z,14}$ kommt es im oberen Geschoss für die Wand 14 zu horizontalen Beanspruchungen $F_{H,X,2016} = 2100 \text{ N}$ und damit im Vergleich zur eingeschossigen Betrachtung unter horizontaler Einwirkung in Bild 6-10 zu über 50 % höheren Beanspruchungen. Dadurch zeigt sich, dass die vertikale Einwirkung im unteren Geschoss einen nicht zu vernachlässigenden Einfluss auf das Tragverhalten des oberen Geschosses hat. Dieser Effekt kann weder durch bestehende noch durch das hier vorgestellte Verfahren berücksichtigt werden.

Zu erklären ist die gegenseitige Beeinflussung der einzelnen Geschosse des zweigeschossigen Aussteifungssystems beispielsweise durch eine genauere Betrachtung der Verformungen der Wände 2 und 4 des eingeschossigen Biege- und Schubsystems unter einer horizontalen Einwirkung $F_{y,202}$ nach Bild 6-11. In Bild 9-5 sind die beiden verformten Wände 2 und 4 des unteren Geschosses durch zwei unbelastete, darüber liegende Wandtafeln ergänzt. Die Verformungen der Wandtafeln des oberen Geschosses ergeben sich aus den Neigungen der Wandtafeln im unteren Geschoss, die sich aus der Differenz der Auflagerverformungen, also den Biegeverformungen, ergeben. Da die horizontalen Beanspruchungen der Wände 2 und 4 eine entgegengesetzte Richtung haben, aber trotzdem der Abstand ℓ_A am Kopf- und Fußpunkt erhalten bleiben muss, ergibt sich, dass die Neigung der Wände 2 und 4 unterschiedlich sein muss. Durch die unterschiedliche Neigung der Wandtafeln im unteren Geschoss kommt es zu einer Verkleinerung des Abstands am Kopfpunkt der Wandtafeln des oberen Geschosses. Im zweigeschossigen Aussteifungssystem wird diese Verkleinerung des Abstandes durch die starre Deckenscheibe verhindert, was zu horizontalen Beanspruchungen der Wandtafeln im oberen Geschoss führt. In dem hier betrachteten Lastfall führt dieses Verformungsverhalten dazu, dass die horizontalen Beanspruchungen der Wände 2 und 4 auch auf das obere Geschoss verteilt werden und die Beanspruchungen somit reduziert werden.

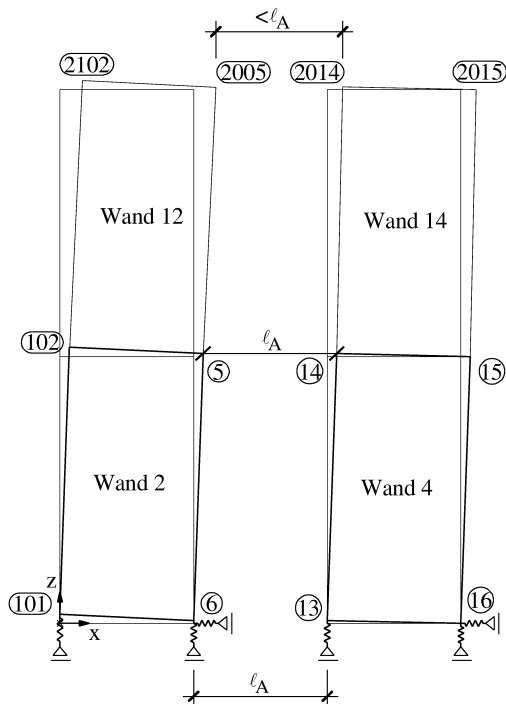


Bild 9-5 : Verformungen der Wände 2 und 4 im Biege- und Schubsystem

Im reinen Biegesystem haben die Wände 2 und 4 im unteren Geschoss die gleiche Neigung, weil sich die Verformungen nur aus den Biegeverformungen ergeben und die Wandtafel selber durch die Vernachlässigung der Schubverformungen als starre Scheibe erhalten bleibt. Dadurch kommt es, wie in Bild 9-6 zu erkennen, im oberen Geschosses zu einer gleichförmigen Kopfverschiebung der Wände 12 und 14. Der Abstand ℓ_A zwischen den Wänden 12 und 14 bleibt am Kopf- und Fußpunkt erhalten und es kommt zu keinen Beanspruchungen der Wände im oberen Geschoss auch wenn die starre Deckenscheibe berücksichtigt wird.

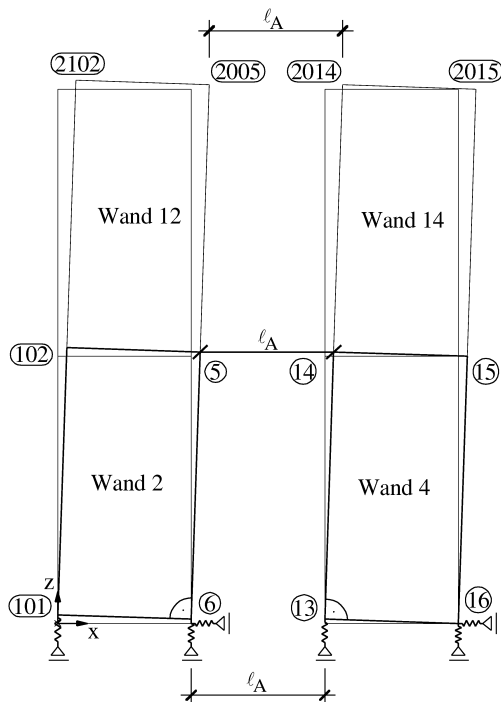


Bild 9-6 : Verformungen der Wände 2 und 4 im Biegesystem

9.5 Bewertung der Untersuchungen

Die Untersuchungen des zweigeschossigen Schubsystems haben gezeigt, dass das Tragverhalten des Aussteifungssystems durch die vorhandenen Verfahren im Holztafelbau nur dann gut abgebildet werden kann, wenn die Biegeverformungen vernachlässigt werden.

Das Tragverhalten des zweigeschossigen Biegesystems kann mit Hilfe des vorgestellten Verfahrens nur dann beschrieben werden, wenn die Geschosse die gleiche Steifigkeit besitzen. Das Aussteifungssystem wird dazu geschossweise von oben nach unten betrachtet und die horizontalen und vertikalen Reaktionen aus dem oberen Geschoss werden als Einwirkungen auf das untere Geschoss angesetzt. Bei unterschiedlicher Geschosssteifigkeit, wie sie auch durch vertikale Einwirkungen erzeugt werden, kommt es aufgrund des unterschiedlichen Verformungsverhaltens zu Zwängungen, die bei dem hier untersuchten sehr einfachen Aussteifungssystem mit Hilfe einer nachgeschalteten Gleichgewichtsuntersuchung

berücksichtigt werden konnten. Allgemein werden durch die Verformungen des unteren Geschosses die Voraussetzungen einer Lagerung des Aussteifungssystems auf einer starren Sohlplatte verletzt, so dass das hier vorgestellte Verfahren nicht beliebig anwendbar ist.

Im Biege- und Schubsystem ist eine geschossweise Betrachtung des mehrgeschossigen Aussteifungssystems mit Hilfe des vorgestellten Verfahrens nicht möglich. Dies lässt sich beispielsweise dadurch zeigen, dass im unteren Geschoss angreifende horizontale oder vertikale Einwirkung zu Beanspruchungen im oberen Geschoss führen. Auch eine Entkoppelung des Schub- und Biegesystems mit anschließender Verknüpfung, wie es in Kap. 7.6 für das eingeschossige System gezeigt wurde, ist damit nicht möglich. Schon dieses einfache Beispiel eines mehrgeschossigen Aussteifungssystems zeigt, dass das Tragverhalten dieser Systeme nicht zufriedenstellend mit vereinfachten Verfahren abgeschätzt werden kann. Es kommt durch das Zusammenwirken der einzelnen Geschosse zu einem Tragverhalten, das zum einen zu großen Beanspruchungen an Stellen im Aussteifungssystem führt, die bei herkömmlicher Betrachtung nahezu unbeanspruchte bleiben würden. Zum anderen kann es aber auch zu geringeren Beanspruchungen einiger hoch beanspruchter Stellen und zu einer Verringerung der Verformungen kommen. Es bleibt aus sicherheitsrelevanten aber auch aus wirtschaftlichen Gesichtspunkten zur Betrachtung mehrgeschossiger Gebäude nur die Beschreibung durch FE-Modelle, was mit Hilfe der im Rahmen dieser Arbeit verwendeten Ein-Element-Tafel sehr einfach möglich ist.

Obwohl durch die Betrachtung des Aussteifungssystems mit Hilfe eines FE-Modells der Nachweis der Verformungen der Wandtafeln recht leicht möglich ist, wird gerne nach Möglichkeiten gesucht, auf diesen Nachweis zu verzichten. Nach der DIN 1052:2004-08, 8.7.5 (8) kann auf den Nachweis der horizontalen Verformungen und auf eine Berücksichtigung der Auswirkungen von Imperfektionen in Form einer Schrägstellung verzichtet werden, wenn

- die Tafellänge mindestens $H / 3$ beträgt,
- die Breite der Platten mindestens $H / 4$ beträgt,
- die Tafel direkt in einer steifen Unterkonstruktion gelagert ist und
- die Erhöhung der charakteristischen Werte der Tragfähigkeit der Verbindungsmittel nach 10.6 (4) der DIN nicht in Anspruch genommen wird.

Bei vertikal beanspruchten Wandtafeln kann nach 8.7.6 (5) der DIN 1052:2004-08 auf den Nachweis nach Theorie II. Ordnung verzichtet werden, wenn die horizontale Verformung der aussteifenden Bauteile aus einer Ersatzlast F_d , welche die Auswirkung von Imperfektionen

von vertikal beanspruchten Wandtafeln berücksichtigt, und aus den restlichen äußeren Einwirkungen $H/100$ nicht überschreitet.

Die im Rahmen der Beispiele in dieser Arbeit verwendeten Wandtafeln entsprechen den oben angesprochenen geometrische Bedingungen und ihre Verbindungsmittel erreichen bei den gegebenen Einwirkungen bei weitem nicht ihre Tragfähigkeit. Außerdem waren die eingesetzten Steifigkeiten höher, als für die entsprechenden Nachweise in der Norm gefordert. Trotzdem kommt es, wie die Auflistung unten zeigt, in der zweigeschossigen Betrachtung mit über 52 mm zu einer Verformung, die fast $1/100$ der Höhe des Aussteifungssystems beträgt. In der eingeschossigen Betrachtung entspricht die Verformung mit 13,2 mm nur etwa $1/200$ der Höhe des Aussteifungssystems. Eine entsprechend ihrer höheren Beanspruchung größere Steifigkeit der vertikalen Auflager im unteren Geschoss des zweigeschossigen Systems würde die horizontalen Verformungen vermindern und am Kopfpunkt des Systems zu genau doppelt so großen Verformungen wie im eingeschossigen System führen, was noch erlaubt wäre. Zusätzlich zu diesen Verformungen kommen jedoch die Biegeverformungen des oberen Geschosses, so dass die Biegeverformungen des zweigeschossigen Systems immer mehr als doppelt so groß sind wie die des eingeschossigen und die vereinfachten Annahmen nicht auf der sicheren Seite liegen. Es zeigt sich, dass die Vereinfachungen der DIN 1052:2004-08 nicht ohne weiteres auf den mehrgeschossigen Holztafelbau anwendbar sind.

Infolge der horizontalen Einwirkung $F_{y,2202}$ kommt es im zweigeschossigen Aussteifungssystem in U+I-Stellung zu folgenden Verformungen im Punkt 2202:

- Verformung im Schubsystem: $v_{S,2202} = 9,4 \text{ mm}$
- Verformung im Biege- und Schubsystem ohne vertikale Verbindung im U- Querschnitt: $v_{BSO,2202} = 52,5 \text{ mm}$
- Verformung im Biege- und Schubsystem mit vertikaler Verbindung im U- Querschnitt: $v_{BSM,2202} = 27,5 \text{ mm}$

Im eingeschossigen Aussteifungssystem kam es zu folgenden Verformungen:

- Verformung im Schubsystem: $v_{S,2202} = 4,6 \text{ mm}$
- Verformung im Biege- und Schubsystem ohne vertikale Verbindung im U- Querschnitt: $v_{BSO,2202} = 13,2 \text{ mm}$
- Verformung im Biege- und Schubsystem mit vertikaler Verbindung im U- Querschnitt: $v_{BSM,2202} = 8,4 \text{ mm}$

Auf den Nachweis der Verformungen der Wandtafel kann jedoch verzichtet werden, wenn bei der Ermittlung der Mindestlänge der Wandtafel und der Mindestbreite der Platten nicht die Höhe der Wandtafel, sondern die Höhe des gesamten Aussteifungssystems angenommen wird. Wie in Bild 9-7 dargestellt, kommt es damit bei einem zweigeschossigen System neben der Verdopplung der horizontalen Einwirkung auch zu einer Verdopplung der Mindestlänge der Wandtafeln. Durch einen einfachen Vergleich der Verformungen infolge der Steifigkeit des Zugauflagers kann gezeigt werden, dass die Annahme der Gesamthöhe für die Bestimmung der Mindestlänge auf der sicheren Seite liegt:

Es wird angenommen, dass die Wandtafel in Bild 9-7a die Mindestabmessung von $H_1 / 3$ besitzt und ihre Verbindungsmittel durch die horizontale Einwirkung F_y voll ausgenutzt sind. Auch die restlichen Anforderung nach DIN 1052:2004-08, 8.7.5 (8) sind erfüllt, so dass auf den Nachweis der Verformung verzichtet werden könnte. Die horizontale Verformung der Wandtafel infolge der Steifigkeit K_t des Zugauflagers ergibt sich aus

$$v_1 = \frac{F_y}{K_t} \cdot \left(\frac{H_1}{\ell_1} \right)^2. \quad (9.1)$$

Mit der Mindestanforderung $\frac{H_1}{\ell_1} = 3$ folgt $v_1 = 9 \cdot \frac{F_y}{K_t}$, was zusammen mit den Schubverformungen kleiner sein soll als die zulässige Verformung.

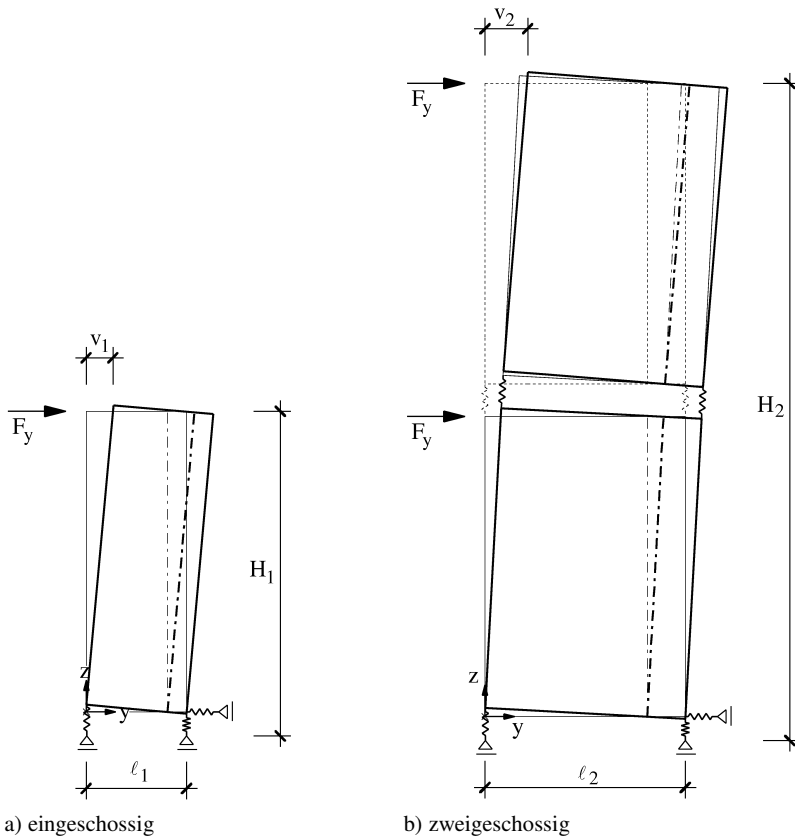


Bild 9-7 : Mindestwandlängen nach DIN 1052:2004-08

Die Wandtafeln in Bild 9-7b erfüllen die Mindestabmessung von $H_2 / 3$, mit $H_2 = 2 \cdot H_1$, und haben ansonsten die gleichen Steifigkeitswerte wie die Wandtafel in Bild 9-7a. Die horizontale Verformung am Kopfpunkt des oberen Geschosses infolge der Steifigkeit der Zugverbindungen ergibt sich aus

$$v_2 = \frac{F_y}{K_t} \cdot \left(\frac{H_1}{\ell_2} \right)^2 + \frac{3 \cdot F_y \cdot H_1 \cdot H_2}{K_t \cdot \ell_2 \cdot \ell_2} \quad (9.2)$$

Mit $\frac{H_2}{\ell_2} = 3$ und $\frac{H_1}{\ell_2} = \frac{3}{2}$ folgt $v_2 = \frac{63}{4} \cdot \frac{F_y}{K_t} \leq 2 \cdot 9 \cdot \frac{F_y}{K_t}$. Da auch die

Schubverformungen bei gleichen Steifigkeiten im zweigeschossigen System kleiner werden,

ist das Verhältnis von Gesamtverformungen zu zulässiger Verformung bei der mehrgeschossigen Betrachtung immer kleiner als bei der eingeschossigen.

Die Verwendung der Gesamthöhe des Aussteifungssystems zur Bestimmung der Mindestlänge der Wandtafel bedeutet, dass bei 5-geschossigen Gebäuden Wandtafeln ohne Öffnungen von etwa 5 m Länge über die Höhe des gesamten Gebäudes erforderlich sind, wenn auf den Nachweis der Verformungen verzichtet werden soll. Wände dieser Länge werden nur in Ausnahmefällen vorkommen, so dass auch Wandtafeln mit geringerer Länge zur Aussteifung herangezogen werden, die zu sehr viel größeren Verformungen führen und den Nachweis der Verformungen erforderlich machen. Um dabei den Grenzwert von $H / 100$ nach 8.7.6 (5) der DIN 1052:2004-08 nicht zu überschreiten bzw. die Auswirkungen der Berechnung nach Theorie II. Ordnung zu begrenzen, bietet sich die im Rahmen dieser Arbeit untersuchte Aktivierung quer stehender Wandtafeln an. Der Vergleich der Verformungen im oben beschriebenen Beispiel zeigt, dass in der zweigeschossigen Variante die Verformung der aussteifenden Wandtafel durch die Verbindung mit den quer stehenden Wänden fast halbiert wird. Allerdings kommt es dadurch, wie beschrieben, zu einer Verdrehung der Deckenscheibe und damit zu größeren horizontalen Verformungen an anderen Punkten des Aussteifungssystems. Diese haben nach der Formulierung der DIN 1052:2004-08 keine Relevanz, da dort nur die Verformung des aussteifenden Bauteils betrachtet wird. Richtiger wäre nach Meinung des Verfassers die Verformungsbegrenzung auf vertikale beanspruchte Bauteile zu beziehen, also in aller Regel die maximale Verformung des Aussteifungssystems anzunehmen.

10 Zusammenfassung, Wertung und Ausblick

Die Untersuchungen in dieser Arbeit analysieren das räumliche Tragverhalten von Aussteifungssystemen im Holztafelbau unter Berücksichtigung der Auflagersteifigkeiten und der direkten Verbindungen der Wandtafeln an ihren vertikalen Berührungskanten. Aussteifungssysteme im Holztafelbau setzen sich aus Dach-, Decken- und Wandtafeln zusammen, die schubfest miteinander verbunden sind. Horizontale Einwirkungen werden über die Dach- und Außenwandtafeln an die Deckentafel weitergeleitet. Von der als starr angenommenen Deckenscheibe werden die horizontalen Einwirkungen auf die einzelnen Wandtafeln abgegeben, die nun ebenfalls nur einer scheibenartigen Beanspruchung Widerstand leisten. Die Aufteilung der horizontalen Einwirkungen auf die Wandtafeln ist abhängig von deren Lage und horizontalen Steifigkeit.

Die horizontale Steifigkeit einer Wandtafel bei scheibenartiger Beanspruchung, als Verhältnis von Horizontalkraft und horizontaler Kopfverschiebung, setzt sich aus ihrer Schubsteifigkeit und ihrer Biegesteifigkeit zusammen. Die Schubsteifigkeit ergibt sich im Wesentlichen aus den Verformungen der Beplankung, des Verbundes von Rippen und Beplankung und der horizontalen Verbindung mit den Decken. Die Verformungen der Beplankung und der Verbindung mit den Decken sind wesentlich geringer als die des Verbundes von Rippen und Beplankung und werden im Rahmen dieser Arbeit vernachlässigt. Die Biegesteifigkeit einer Wandtafel ergibt sich wegen der geringen Verbundsteifigkeit senkrecht zum Beplankungsrand im Wesentlichen aus den geringen Verformungen der vertikalen Randrippen. Außerdem kommt es infolge der Steifigkeit der Lagerung auf der Sohlplatte, bzw. für die mehrgeschossige Betrachtung der vertikalen Verbindungen der Wandtafel mit der oberen und unteren Decke, zu vertikalen Verformungen, die zu einer Starrkörperdrehung der Wand und damit ebenfalls zu einer horizontalen Kopfverschiebung führen. Im Rahmen dieser Arbeit werden die Verformungen der vertikalen Rippen vernachlässigt und die Biegesteifigkeit der Wandtafel nur aus den Steifigkeiten der Auflager ermittelt. Obwohl das teilweise nichtlineare und plastische Tragverhalten des Verbundes und der Verbindungen bekannt ist, wird hier für den Verbund und alle Verbindungen ein linear elastisches Tragverhalten angenommen, um zunächst das grundlegende, auch bei linearen Annahmen schon sehr komplexe räumliche Tragverhalten der Aussteifungssysteme zu erklären und die Ergebnisse der Berechnungsmethoden mit relativ einfachen Mitteln und möglichst anschaulich analysieren zu können. Es wird zunächst ein eingeschossiges System betrachtet.

Um die wesentlichen Effekte des räumlichen Tragverhaltens des Aussteifungssystems erkennen und analysieren zu können, wird das komplexe Tragverhalten einer Wandtafel mit Hilfe eines Elements modelliert, welches das wesentliche Verformungsverhalten einer Wandtafel in guter Näherung abbildet und an dem die bemessungsrelevanten Beanspruchungen leicht ablesbar sind. Räumliche Vergleichsberechnungen mit einem wesentlich genaueren Wandtafelmodell aus finiten Scheiben-, Stab- und Federelementen ergaben, dass es infolge der Berücksichtigung der Steifigkeit der Auflager und der Verbindung der Wandtafeln an ihren vertikalen Berührungskanten zu keinen wesentlichen Beanspruchungen der Wandtafeln kommt, die eine Modellierung mit Hilfe des genaueren Modells erforderlich machen. Bei dem Element handelt es sich um ein ebenes Schalenelement, dem reine Membraneigenschaften zugeordnet werden. Die Schubverformung des Elements wird über einen effektiven Schubmodul G gesteuert, der sich aus der Steifigkeit des Verbundes zwischen Beplankung und Rippen ergibt. Der Elastizitätsmodul des Scheibenelements ist einer starren Scheibe entsprechend übermäßig groß angenommen worden. Die Steifigkeit der Auflager und die direkte Verbindung der Wandtafeln wird durch lineare Federelemente an den Eckpunkten des Elements berücksichtigt.

Ausgehend von der einzelnen Wandtafel unter einer horizontalen Einzellast werden Wandtafeln in L-, U- und U+1-Stellung ohne und mit direkter Verbindung der Wandtafeln untersucht. Der Vergleich zeigt, dass unter Berücksichtigung der Auflagersteifigkeiten, bei den Wandtafelstellungen mit Verbindung in den Berührungskanten Verformungen senkrecht zur beanspruchten Wandtafel auftreten, die sich bei den Wandtafeln ohne Verbindung nicht eingestellt haben. Die Verformungen nehmen zu, je steifer die Verbindung und je geringer die Auflagersteifigkeit an der Stelle der Verbindung ist. Solange sich die Verformungen frei einstellen können, wie bei der L- und U-Stellung, kommt es zu keinen horizontalen Beanspruchungen der senkrecht zur Einwirkungsrichtung stehenden Wände. Sind die L- oder U-Stellung mit Verbindung der Wände in ein Aussteifungssystem eingebunden, wie für den einfachen Fall der U+1-Stellung untersucht, kommt es zu horizontalen Beanspruchungen der senkrecht stehenden Wände. Diese Beanspruchung steigt, je steifer die Verbindung, je geringer die Auflagersteifigkeit an der Stelle der Verbindung und je steifer das restliche Aussteifungssystem, also bei der U+1-Stellung die einzelne Wand 4, ist.

Die zurzeit im Holztafelbau verwendeten Berechnungsmodelle zur Abschätzung des Tragverhaltens der Gebäudeaussteifung (Geschoss für Geschoss) berücksichtigen ausschließlich die gegenseitige horizontale Verschiebung der beiden Deckenscheiben eines Geschosses und ihre gegenseitige Verdrehung um eine lotrechte Drehachse. Dieser Translation und Rotation wirken die Wände durch ihre horizontale Steifigkeit entgegen, die sich aus der oben beschriebenen Schub- und/oder Biegesteifigkeit ergibt. Trotz der Berücksichtigung der Biegesteifigkeit in der horizontalen Steifigkeit und den damit verbundenen vertikalen Verformungen, wird für diese Modelle vorausgesetzt, dass keine vertikalen Verformungen auftreten. Damit haben bei diesen Berechnungsmodellen die direkte Verbindung der Wände untereinander und die vertikalen Einwirkungen keinen Einfluss auf das Tragverhalten des Geschosses.

Um diese Einflüsse berücksichtigen zu können, wird im Rahmen dieser Arbeit ein Berechnungsverfahren in Analogie zur Biege- und Torsionstheorie des Stabes vorgestellt. Die „Querschnittswerte“ lassen sich aus den Auflagersteifigkeiten der Wandtafeln berechnen. Mit Hilfe der Einheitsverschiebungszustände ergeben sich anstatt der Normalspannungen die vertikalen Auflagerreaktionen der Wandtafeln. Wie beim Stab müssen bei Anwendung dieses Verfahrens die Schubverformungen vernachlässigbar klein sein.

Anders als beim Stab ist im Holztafelbau die Schubverformung jedoch nicht vernachlässigbar. Die gleichzeitige Berücksichtigung der Biege- und Schubsteifigkeit ist hier allerdings möglich, weil sich nur die Schubverformungen aus den elastischen Formänderungen des Stabes, hier der Wandtafeln, ergeben, während die Biegeverformungen im wesentlichen nicht aus den elastischen Formänderungen des Stabes, sondern aus den Steifigkeiten der Auflager resultieren. Für die Berechnung werden das Biege- und Schubsystem zunächst entkoppelt betrachtet. Für jedes System wird eine Steifigkeitsmatrix ermittelt in der die Steifigkeiten aller Wandtafeln eines Geschosses enthalten sind. Die Steifigkeitsmatrix des Schubsystems wird mit Hilfe der vorhandenen Verfahren im Holztafelbau berechnet. Die Biegesteifigkeiten werden mit dem oben beschriebenen Verfahren auf Grundlage der Stabtheorie berücksichtigt. Die Kopplung der Steifigkeitsmatrizen des Schub- und Biegesystems erfolgt wie bei einer Reihenschaltung zweier Federn. Mit Hilfe der gekoppelten Steifigkeitsmatrix wird das globale Verschiebungsfeld eines Geschosses ermittelt. Durch Transformation auf die lokalen Ursprungspunkte ergeben sich die lokalen Verschiebungsfelder der einzelnen Querschnitte. Aus den lokalen Verschiebungsfeldern werden Lastvektoren errechnet, die auf das Schubsystem der einzelnen Querschnitte angesetzt werden. Die horizontalen

Beanspruchungen der einzelnen Wandtafeln können nun mit Hilfe der bekannten Verfahren im Holztafelbau berechnet werden.

Vertikale Einwirkungen im Aussteifungssystem haben einen großen Einfluss auf die horizontale Beanspruchung der einzelnen Wände. Zum einen können einzelne Wandtafeln durch vertikale Druckkräfte auch bei einer horizontalen Beanspruchung überdrückt bleiben, so dass für die Berechnungen die wesentlich höhere Steifigkeit eines Druckauflagers anzusetzen ist. Zum anderen führen exzentrisch zum Schwer- oder Schubmittelpunkt angreifende vertikale Einwirkungen zu zusätzlichen horizontalen Beanspruchungen der Wandtafeln. Wie die hier geführten Untersuchungen zeigen, kann sich der Einfluss der vertikalen Einwirkungen auf das Gesamttragverhalten durch die Berücksichtigung der direkten Verbindung der Wandtafeln vergrößern.

Das räumliche Tragverhalten der Aussteifungssysteme unter vertikalen Einwirkungen kann mit Hilfe des in dieser Arbeit vorgestellten Verfahrens berechnet werden. Die für die Berechnung anzunehmende Auflagersteifigkeit ist dabei zunächst abhängig von der Richtung der vertikalen Einwirkung. Da sich durch die gleichzeitige Berücksichtigung der horizontalen Einwirkung die Wirkungsrichtung der vertikalen Beanspruchung und damit auch die anzunehmende Auflagersteifigkeit ändern kann, kommt es zu einem nichtlinearen Tragverhalten des Aussteifungssystems, das durch einen Iterationsprozess abgebildet werden muss.

Die Untersuchungen zeigen, dass das Tragverhalten eines auf einer starren und unverschieblichen Sohlplatte gelagerten eingeschossigen Aussteifungssystems unter Berücksichtigung der Auflagersteifigkeiten, der direkten Verbindung der Wandtafeln und der vertikalen Einwirkungen durch das vorgestellte analytische Verfahren abgebildet werden kann. Die Betrachtung eines zweigeschossigen Aussteifungssystems zeigt, dass die Berechnungsverfahren zur Abbildung des Tragverhaltens mehrgeschossiger Systeme nur sehr begrenzt einsetzbar sind. Für das reine Schubsystem liefern die bestehenden Verfahren aus dem Holztafelbau bei geschossweiser Betrachtung die gleichen Ergebnisse wie auch die FE-Simulation des Gesamtsystems. Das Biegesystem kann mit Hilfe der geschossweisen Anwendung des hier vorgestellten Verfahrens abgebildet werden, wenn die Auflagersteifigkeiten in den einzelnen Geschossen gleich sind. Das Berechnungsverfahren zur gleichzeitiger Berücksichtigung der Schub- und Biegesteifigkeit kann bei mehrgeschossigen Systemen nicht angewendet, da sich die einzelnen Geschosse gegenseitig beeinflussen. So ergaben sich bei den Untersuchungen infolge horizontaler und vertikaler Einwirkungen im

unteren Geschoss Beanspruchungen im oberen Geschoss. Eine Entkopplung dieser beiden Systeme wie noch im eingeschossigen Bereich ist nicht möglich.

Das Tragverhalten eines Aussteifungssystems im mehrgeschossigen Holztafelbau und damit die horizontalen Beanspruchungen der einzelnen Wandtafeln sowie die resultierenden vertikalen Auflagerreaktionen werden von einer Vielzahl von Steifigkeitsparametern beeinflusst. Der neben der Schubsteifigkeit der Wände entscheidende Parameter ist die Steifigkeit der Auflager bzw. der vertikalen Verbindung zwischen den Geschossen. Bei steigender Steifigkeit der Auflager nimmt der Einfluss der direkten Verbindung der Wände und der vertikalen Einwirkungen auf das Gesamttragverhalten exponentiell ab. Bei der Konstruktion der Verbindungen im mehrgeschossigen Holztafelbau sollte somit eine möglichst steife Konstruktion gewählt werden.

Sofern dies aus Kostengründen nicht möglich ist und die Steifigkeit der Zugverbindung der Wände denen in dieser Arbeit gewählten heute üblichen Steifigkeiten entspricht, sollten als Ergebnis der Untersuchungen folgende Punkte bei der Berechnung von mehrgeschossigen Gebäuden in Holztafelbauart beachtet werden:

- Die Steifigkeiten der Zugverbindungen müssen berücksichtigt werden. Da die Steifigkeiten der Druckverbindungen in der Regel wesentlich größer sind als die der Zugverbindungen, ist der Einfluss der Druckverbindungen auf das Tragverhalten des Aussteifungssystems als nicht so groß einzuschätzen. Trotzdem sollten diese Steifigkeiten aufgrund der größeren vertikalen Einwirkungen im mehrgeschossigen Holztafelbau nicht vernachlässigt werden. Die horizontalen Verformungen infolge der Steifigkeit der vertikalen Rippen haben in etwa die gleiche Größenordnung wie die Verformungen infolge der Steifigkeit der Druckauflager, so dass auch die Steifigkeit der vertikalen Rippen berücksichtigt werden sollte. Dies kann vereinfachend durch eine Abminderung der Auflagersteifigkeiten erfolgen.
- Der Einfluss der vertikalen Einwirkungen muss berücksichtigt werden, indem vertikale und horizontale Einwirkungen gleichzeitig auf das Berechnungsmodell angesetzt werden. Es ist nicht ausreichend, die Einzelergebnisse mit Hilfe der Lastfallkombinationen zu superponieren. Die gleichzeitige Berücksichtigung ist notwendig, weil es insbesondere im mehrgeschossigen Holztafelbau leicht zu der Situation kommen kann, dass eine Wandtafel durch große vertikale Einwirkungen auch infolge horizontaler Einwirkungen überdrückt bleibt, während andere Wandtafeln aus darüber liegenden Geschossen mit vertikalen Zugkräften beansprucht

werden. Dies hat zur Folge, dass die überdrückte Wandtafel innerhalb des Aussteifungssystems durch die Nicht-Aktivierung der Zugverbindung eine sehr viel größere Steifigkeit besitzt und damit sehr viel mehr horizontale Beanspruchung auf sich zieht, als es nach einer Berechnung ohne gleichzeitige Berücksichtigung der vertikalen Einwirkungen der Fall wäre. Die größeren horizontalen Beanspruchungen führen wiederum auch zu größeren vertikalen Beanspruchungen, die in Kombination mit den Beanspruchungen infolge vertikaler Einwirkung zu einer sicherheitsrelevanten Unterbemessung der betroffenen Wandtafel führen kann.

- Die Verbindung der Wandtafeln in ihren vertikalen Berührungskanten muss berücksichtigt werden. Durch die Aktivierung der senkrecht stehenden Wandtafeln über die direkte Verbindung untereinander wird die Steifigkeit der beanspruchten Wandtafel im Gesamtsystem im Vergleich zur einfachen Wandtafel erhöht. Sie wird damit im Gesamtsystem höher beansprucht als die einfache Wandtafel. Die Verbindungen können als starr angenommen werden, wenn statisch wirksame Verbindungen der Wände vorhanden sind. Dies ist für den mehrgeschossigen Holztafelbau sehr zu empfehlen ist, da nur so für die Bemessung der Zugverbindungen möglichst viele vertikale Druckkräfte aktiviert werden können. Durch die Aktivierung der senkrecht stehenden Wandtafeln werden die Verformungen des Aussteifungssystems verringert, was für den Nachweis der Verformungen bzw. für die Begrenzung des Einflusses einer Berechnung nach Theorie II. Ordnung wichtig ist.
- Die Bemessung eines mehrgeschossigen Gebäudes in Holztafelbauart scheint aus sicherheitsrelevanten aber auch wirtschaftlichen Gesichtspunkten nur mit Hilfe eines FE-Programms sinnvoll möglich. Dazu wird im Rahmen dieser Arbeit die Modellierung einer Wandtafel mit Hilfe von nur einem Scheibenelement vorgestellt, das über Federn mit den restlichen Scheiben und den Auflagern verbunden ist. Die bemessungsrelevanten Beanspruchungen wie der Schubfluss der einzelnen Wand und die vertikalen Auflagerreaktionen sind an diesem Modell leicht zu ermitteln.

Diese Arbeit leistet einen Beitrag zum besseren Verständnis des räumlichen Tragverhaltens von Aussteifungssystemen im Holztafelbau und gibt dem Tragwerksplaner die Möglichkeit, eine auf die Sicherheit und Wirtschaftlichkeit optimierte Bemessung eines mehrgeschossigen Gebäudes durchzuführen. Um die Berechnungsverfahren weiter zu vereinfachen und das Tragverhalten besser abbilden zu können, bedarf es Untersuchungen, die das nichtlineare und teilweise plastische Tragverhalten der Verbindungen berücksichtigen. Wenn durch solche Untersuchungen sichergestellt werden kann, dass sich die Wandtafel und ihre Verbindungen zu den angrenzenden Bauteilen durch plastische Verformungen einer Überbeanspruchung

entziehen können, erscheint es möglich, einfache Verfahren, zum Beispiel auf Grundlage der Traglasttheorie, für die Berechnung mehrgeschossiger Gebäude in Holztafelbauart anwenden zu können. Außerdem muss das Zusammenwirken der einzelnen Geschosse im mehrgeschossigen System weiter untersucht werden, um auch hierfür vereinfachte Verfahren entwickeln zu können.

Literaturverzeichnis

Andreasson, S. (1999). Three-dimensional interaction in stabilisation of multi-storey timber frame buildings. International Council For Research And Innovation In Building And Construction, CIB-W18/32-15-1, Graz.

Andreasson, S. (2000). Three-Dimensional Interaction in Stabilisation of Multi-Storey Timber Frame Building Systems. Division of Structural Engineering, Lund Institute of Technology, Lund University.

Beck, H. (1961). Die Großtafelbauweise. Der Bauingenieur 36 (1961), Heft 10, S. 382-390.

Beck, H.; Schäfer, H. (1969). Die Berechnung von Hochhäusern durch Zusammenfassung aller aussteifenden Bauteile zu einem Balken. Der Bauingenieur 44 (1969), Heft 3, S. 80-87.

Blaß, H. J.; Laskewitz, B. (2000). Tragfähigkeit von Verbindungen an Holztafelementen. Forschungsbericht der Versuchsanstalt für Stahl, Holz und Steine, Karlsruhe.

Blaß, H. J.; Bejtka, I. (2003). Verbindung mit geneigt angeordneten Schrauben. Bauen mit Holz, 10/2003, S. 28-36.

Boresi, Arthur P.; Schmidt, Richard J.; Sidebottom, Omar M. (1993). Advanced Mechanics of Materials, Fifth Edition. John Wiley & Sons, Inc..

Bornscheuer, F. W. (1952). Systematische Darstellung des Biege- und Verdrehvorganges unter besonderer Berücksichtigung der Wölbtorsion. Stahlbau 21 (1952), H. 1.

Brandt, B. (1976). Zur Berechnung der haltenden Bauteile von Hochhäusern. Mitteilungen aus dem Institut für Massivbau der Technischen Hochschule Darmstadt.

Chen, Wai-Fah; Atzuta, Toshio (1977). Theory of Beam-Columns, Volume 2: Space Behaviour and Design. McGraw-Hill International Book Company.

Chwalla, E. (1954). Einführung in die Baustatik. Stahlbau-Verlags-Gesellschaft mbH Köln.

Czerwenka, G.; Schnell, W. (1967). Einführung in die Rechenmethoden des Leichtbaus. Bibliographisches Institut, Mannheim, Hochschultaschenbuch Verlag.

Cziesielski, E. (1982). Stabilität von Holzhäusern unter Horizontalbelastung. Bauen mit Holz, Heft 7 (1982), S. 446-450.

Dettmann, O. (2003). Entwicklung von Modellen zur Abschätzung der Steifigkeit und Tragfähigkeit von Holztafeln. Dissertation an der TU Braunschweig.

Dujić, B.; Žarnić, R. (2002). Influence of Vertical Load on Lateral Resistance of Timber-Framed Walls. International Council For Research And Innovation In Building And Construction, CIB-W18/35-15-4.

Easley, J. T.; Foomani, M.; Dodds, R. H. (1982). Formulas for Wood Shear Walls, J. Struct. Div., ASCE 108 (1982) ST 11, S. 2460-2478.

Ebner, H. (1933), Die Beanspruchung dünnwandiger Kastenträger auf Drillung bei behinderter Querschnittswölbung. Zeitschrift für Flugtechnik und Motorschiffahrt, Nr. 23, S. 645-692, 24. Jahrg.

Enjily, V.; Griffiths, R. (1996). The Current Status of Medium-Rise Timber Frame Buildings in the UK.. International Wood Engineering Conference '96, S. 2-63 bis 2-69.

Enjily, V.; Mettem, C. (1996). The Racking Resistance of Large Wall Panels. International Wood Engineering Conference '96, S. 2-321 bis 2-328.

Enjily, V. (2000). Fire Test on 5 storey timber construction. Tagungsband 6. Internationales Holzbauforum, Garmisch-Partenkirchen.

Friemann, H. (1993). Schub und Torsion in geraden Stäben. Werner Ingenieurtexte 78, 2. Auflage, 1993.

Glos, P.; Henrici, D.; Schmelmer, B (1987). Festigkeit von ein- und zweiseitig beplankten Wandelementen. Holz als Roh- und Werkstoff 45 (1987). S. 41-48.

Girhammar, Ulf Arne; Liping Wu; Källsner, Bo (2002). On test methods for determining racking strength and stiffness of wood-framed shear walls. International Council For Research And Innovation In Building And Construction, CIB-W18/35-15-1.

Gruttmann, F.; Wagner, W. (2001). Ein Weggrößenverfahren zur Berechnung von Querkraftschubspannungen in dünnwandigen Querschnitten. Bauingenieur, band 76, Oktober 2001, S. 474-479.

Haße, Gerhard (2004). Räumliche Aussteifung von Geschoßbauten. Wendehorst Bautechnische Zahlentafeln. 31. Auflage. B. G. Teubner, Stuttgart.

He, Ming ; Lam, Frank; Foschi, Ricardo O. (2000). Numerical analysis of statically loaded three-dimensional light-frame building. Proceedings of the World Conference on Timber Engineering, Vancouver, Volume 1 (2000) 1.2.1.

He, Ming ; Lam, Frank; Foschi, Ricardo O. (2001). Modelling Three-Dimensional Timber Light-Frame Buildings. Journal of Structural Engineering, Vol. 127, No. 8, August 2001, S. 901-913.

Heinisuo, M. (1986). On the Distribution of the Horizontal Loading Due to Earthquake and Extreme Wind in Prefabricated Low-Rise Wooden Buildings. VTT Symposium 72, Espoo Finland.

Henrici, D. (1981/1). Verankerung schubbeanspruchter Wandscheiben aus Holz und Holzwerkstoffen nach Versuchen. Die Bautechnik 5/1981, S. 163-167.

Henrici, D. (1981/2). Vereinfachte Theorie der Verankerung schubbeanspruchter Wandscheiben aus Holz Und Holzwerkstoffen. Die Bautechnik 1/1981, S. 6-10.

Henrici, D. (1984). Zur Bemessung windaussteifender hölzerner Wandscheiben. Bauen mit Holz 12/84, S. 873-877.

Hrennikof, A. (1940). Plane Stress and Bending of Plates by Method of Articulated Framework. Thesis presented at the Massachusetts Institute of Technology.

Kawai, Naohito; Okiura, Hiroshi (2002). Design Methods to Prevent Premature Failure of Joints at Shear Wall Corners. International Council For Research And Innovation In Building And Construction, CIB-W18/35-15-8.

Kawai, N. (2000). Prediction of Earthquake of Timber Houses Considering Shear Deformation of Horizontal Frames. International Council For Research And Innovation In Building And Construction, CIB-W18/33-15-2.

Källsner, Bo (1983). Windaussteifung von Wandkonstruktionen im Holzskelettbau mit Plattenwerkstoffen. Bauen mit Holz 6/83, S. 374-378.

Källsner, Bo ; Lam, B. (1995). Diaphragms and shear walls. Step 3 Heft um Eurocode 5, S. 15/1-15/16.

Källsner, Bo; Girhammar Ulf Arne; Liping Wu (2001). A simplified plastic model for design of partially anchored wood-framed shear walls. International Council For Research And Innovation In Building And Construction, CIB-W18/34-15-1.

Källsner, Bo; Girhammar Ulf Arne; Liping Wu (2002). A plastic design model for partially anchored wood-framed shear walls with openings. International Council For Research And Innovation In Building And Construction, CIB-W18/35-15-2.

Källsner, Bo; Girhammer, Ulf Arne (2004). Influence of framing joints on plastic capacity of partially anchored wood-framed shear walls. International Council For Research And Innovation In Building And Construction, CIB-W18/37-15-3.

Kasal, B. (ca. 1983). Berechnung der Holzkonstruktionen mit der Methode der Finiten Elemente im Verhältnis zu den elastischen Konstanten. Mitteilung des Holzforschungsinstituts in Bratislava, S. 1.2.020-1.2.036.

Kessel, M. H.; Drücker, K. (1996). Zur Verankerung der Wandscheiben von Holzhäusern bei Windeinwirkung. Bauen mit Holz 10 (1996), S. 779-783.

Kessel, M. H.; Dettmann, O. J. P. (2000/1). Ermittlung des Einflusses der Verankerung von Wandscheiben auf die Tragfähigkeit und Gebrauchstauglichkeit von Holzhäusern. Forschungsbericht des Instituts für Baukonstruktion und Holzbau, Braunschweig.

Kessel, M. H.; Dettmann, O. J. P. (2000/2). On the need for tension anchorage in timber houses. Proceedings of the World Conference on Timber Engineering, Vancouver, Volume 1 (2000) 1.2.4.

Kessel, M. H.; Schönhoff, Th. (2001/1). Entwicklung eines Nachweisverfahrens für Scheiben auf der Grundlage von Eurocode 5 und DIN 1052 neu. Forschungsbericht des Instituts für Baukonstruktion und Holzbau, Braunschweig.

Kessel M. H., Huse M., Augustin R. (2001/2). Einfluß der Verbindungsmittelabstände auf die Tragfähigkeit von Wandtafeln. Schlußbericht an die Arbeitsgruppe Innovative Projekte AGIP beim Ministerium für Wissenschaft und Kunst des Landes Niedersachsen, Labor für Holztechnik LHT, Hildesheim

Kessel, M. H. et al. (2002/1). Fertigungsprozessauslegung für Holzgroßprojekte im kleinbetrieblichen Unternehmensverbund niedersächsischer Zimmerei- und Holzbaubetriebe. Gefördert durch das Ministerium für Wirtschaft und Verkehr des Landes Niedersachsen. Abschlussbericht zum Förderprojekt (unveröffentlicht).

Kessel, M. H. (2002/2). Räumlichkeit der Tragwerke. Vorlesungsumdruck zur Vorlesung Holzbau III am Institut für Baukonstruktion und Holzbau, Braunschweig.

Kessel, M. H. (2003/1). Tafeln: Eine elastische, geometrisch lineare Beschreibung. Holzbau Kalender 2003. Bruderverlag.

Kessel, M. H.; Sandau-Wietfeldt, M. (2003/2). Erweiterung der Einsatzmöglichkeiten dünner, klebstoff- und bindemittelfreier Holzwerkstoffplatten für den Holzbau. Gefördert durch das Bundesministerium für Bildung und Forschung, BMBF. Forschungsbericht des Instituts für Baukonstruktion und Holzbau, Braunschweig.

Kessel (2004). Vereinfachte Berechnung von scheibenartig beanspruchten Tafeln. In Blaß, H. J.; Ehlbeck, J.; Kreuzinger H.; Steck, G. (2004). Erläuterungen zur DIN 1052:2004-08. DGfH München.

Kessel, M. H.; zur Kammer, T. (2004). Three-dimensional load-bearing behaviour of multi-storey timber frame buildings. Proceedings of the World Conference on Timber Engineering, Lahti, Volume 1 (2004), S. 7-12.

Kessel, M. H.; zur Kammer, T. (2005). Räumliches Tragverhalten mehrgeschossiger Gebäude in Holztafelbauart. Bauingenieur. Mai 2005. S. 277-282.

Kessel, M. H.; Sandau-Wietfeldt, M. (2005). Zum Tragverhalten von symmetrisch beplankten Holztafeln mit und ohne planmäßig beulender Beplankung. Bauingenieur. Oktober 2005. S. 470-478.

König, G.; Liphardt, S. (1990). Hochhäuser aus Stahlbeton. Betonkalender 1990, Verlag Ernst und Sohn, S.457-439.

Koerner, B. D.; Schmidt, R. J.; Goodman, J. R.; Richins; W. D. (2000). Lateral load testing an analysis of manufactured homes. Proceedings of the World Conference on Timber Engineering, Vancouver, Volume 1 (2000) 2.1.1.

Marguerre, K. (1940). Torsion von Voll- und Hohlquerschnitten. Der Bauingenieur 21, S. 317-322.

McCutcheon (1985). Racking Deformations in Wood Shear Walls, J. Struc. Eng., ASCE 111 (1985) Nr. 2, S. 257-269.

Mehlhorn, G. (1999). Der Ingenieurbau. Verlag Ernst & Sohn. Berlin.

Mettem, C. J.; Pitts, G. C.; Steer, P. J.; Enjily V. . Current Development in Medium-Rise Timber Frame Buildings in the UK.

Muszala, W. (1987). Wandscheiben aus Holz- und Holzwerkstoffen. Dissertation an der TU Berlin.

Nakajima, S. (2001). The Effect of the Moisture Content on the Performance of the Shear Walls. International Council For Research And Innovation In Building And Construction, CIB-W18/34-15-2.

Ni, Chun; Karacabeyli, Erol; Ceccotti, Ario (1999). Design Methods For Shear Walls With Openings. International Council For Research And Innovation In Building And Construction, CIB-W18/32-15-3, Graz.

Ni, Chun; Karacabeyli, Erol; Ceccotti, Ario (2000). Lateral Load Capacities of Horizontally Sheated Unblocked Shear Walls. International Council For Research And Innovation In Building And Construction, CIB-W18/33-15-1, Delft.

Ni, Chun; Karacabeyli, Erol (2000). Effect of overturning restraint on performance of shear walls. Proceedings of the World Conference on Timber Engineering, Vancouver, Volume 1 (2000) 2.3.1.

Patton-Mallory, M.; McCutcheon, W. J. (1987). Prediction Racking Performance of Walls Sheated on Both Sides, For. Prod. J. 37 (1987) Nr. 9, S. 27-32.

Ranta-Maunus, Alpo (2002). Starke, duktile Verbindungen für Holzkonstruktionen. 8. Internationales Holzbau-Forum 2002.

Raschper, N. (1990). Zur Berechnung von Wandscheiben in Holztafelbauart. Dissertation an der TU Braunschweig.

Roik, Karlheinz (1978). Vorlesung über Stahlbau (Grundlagen). Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin.

Roik; Carl; Lindner (1972). Biegetorsionsprobleme gerader dünnwandiger Stäbe. Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin.

Roik, Karlheinz; Sedlacek, Gerhard (1966). Theorie der Wölbkrafttorsion unter Berücksichtigung der sekundären Schubverformungen. Der Stahlbau 2/1966, S. 43-52.

Roik, Karlheinz; Sedlacek, Gerhard (1970). Erweiterung der technischen Biege- und Verdrehtheorie unter Berücksichtigung von Schubverformungen. Die Bautechnik 1/1970, S. 20-32.

Rosman R. (1967). Faltwerke als aussteifende Systeme bei Hochbauten. Bauing. 42 (1967), S. 55-66.

Schäfer, H. G. (1969). Die Berechnung von Hochhäusern als räumlicher Verband von Scheiben, Kernen und Rahmen. Dissertation an der Technische Hochschule Darmstadt.

Schock, H. J. (1986). Theorie 2. Ordnung im Holzbau. Bauingenieur 61 (1986), S. 255-257.

Schmidt, Richard J.; Moody, R., C. (1989). Modelling Laterally Loaded Light-Frame Buildings. J. Struc. Eng., Vol. 115 (1989) No. 1, S. 201-217.

Schnell, W.; Gross, D.; Hauger, W. (1992). Technische Mechanik, Band 2 :Elastostatik. Springer Verlag.

Schulze, H. (1982). Möglichkeiten und Grenzen der Holztafelbauart. Ingenieurholzbau in Forschung und Praxis.

Schulze, H. (1986). Holzhäuser in Holztafelbauart. Holzbautaschenbuch, Bd. 1.

Schulze, H.; Gebhardt, M. (1996). Tragverhalten von Mehrasterwandscheiben mit Öffnungen. Bauen mit Holz 8 (1996), S. 635-641.

Schulze, H.; Raschper, N. (1989/1). Erarbeitung von Kriterien für Wände von Wohngebäuden in Holztafelbauart ohne Nachweis der Ableitung der Windlasten. Bauen mit Holz 1(1989), S. 22-25.

Schulze, H.; Schönhoff, T. (1989/2). Bemessungsvorschläge für Deckenscheiben in Holzbauart mit dreiseitiger Lagerung. Bauen mit Holz 2 (1989), S. 96-101.

Spierig, S. (1963). Beitrag zur Lösung von Scheiben-, Platten- und Schalenproblemen mit Hilfe von Gitterrostmodellen. Dissertation an der Technischen Hochschule Hannover.

Steinmetz, D. (1992). Die Aussteifung von Holzhäusern am Beispiel des Holzrahmenbaus. Holzbau-Statik-Aktuell, Ausgabe Juli 1992/1.

Stiller, M. (1961). Beitrag zur Berechnung von Scheibensystemen bei Hochhäusern unter Horizontalbelastung. Dissertation an der TU Berlin-Charlottenburg.

Stiller, M. (1965). Verteilung der Horizontalkräfte auf die aussteifenden Scheibensysteme von Hochhäusern. Beton- und Stahlbetonbau 2/1965, S. 42-45.

Tuomi, R. L.; McCutcheon, W. J. (1978). Racking Strength of Light-Frame Nailed Walls, J. Struc. Div., ACSE 104 (1978) ST, S. 1131-1140.

v. Halász, R.; Tantow, G. (1966/1). Großtafelbauten - Konstruktion und Bemessung. Bauingenieur-Praxis, Heft 55, Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin.

v. Halász, R.; Tantow, G. (1966/2). Schubfestigkeit der Vertikalfugen und Verteilung der Horizontalkräfte im Großtafelbau. Berichte aus der Bauforschung, Heft 45, Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin.

Wlassow, W. S. (1964). Dünnwandige, elastische Stäbe. Bd. I und II. VEB Verlag für Bauwesen, Berlin.

Yasumura, M.; Uesugi, M.; Davenne, L. (2004). Estimating 3D behaviour of conventional timber structures with shear walls by pseudo-dynamic tests. International Council For Research And Innovation In Building And Construction, CIB-W18/37-15-1.

Lebenslauf

Thorsten zur Kammer

18.08.1970	geboren in Celle
Familienstand	ledig
Staatsangehörigkeit	deutsch
08/76 - 07/80	Grundschule in Bergen
08/80 - 05/90	Gymnasium in Hermannsburg
07/90 - 06/92	Wehrdienst in Munster – Leutnant der Reserve
10/92 - 03/99	Studium des Bauingenieurwesens an der TU Braunschweig
04/96 - 09/96	Um- und Ausbau einer ehemaligen Hofstelle in Mecklenburg-Vorpommern
10/96 - 12/98	Wissenschaftliche Hilfskraft am Institut für Baukonstruktion und Holzbau der TU Braunschweig
04/99 - 04/04	Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Baukonstruktion und Holzbau der TU Braunschweig
05/04 – dato	Freiberufliche Tätigkeit und Dissertation